平成 25 年度　数学科リレー講座 5 日目

ミンコフスキー幾何

～非ユークリッド幾何としての特殊相対性理論～

担当：上野大樹・網谷泰治

2013 年 8 月 23 日

目次

1　はじめに

「相対性理論って物理じゃないの？幾何学と何の関係があるの？」

本リレー講座の告知を見て，上記のようなことを思った人はいないでしょうか．そのような疑問を持つことは自然なことだと思います．

この節では，この疑問に答えるとともに，幾何学の原点を探っていくことにします．

1.1　幾何学とは

ここで，質問を質問で返すことになってしまいますが，逆にこちらから次のように問いかけさせてください：

「皆さんにとって幾何学とは何ですか？」

この質問にはいろいろな解答が考えられるでしょう．本講義では当面，**幾何学（geometry）**として

$$\text{長さと角度が定まっている空間を調べる理論} \quad \cdots \quad (*)$$

という定義を採用したいと思います．[*1]「長さや角度なんて初めからわかっている」と思った人もいるかもしれませんが，例えば球面幾何での「長さ」は私たちが知っている「長さ」とはだいぶ具合が異なっています（球面上の 2 点の長さは，その 2 点を通る大円の弧の長さと定義されます）．また，「空間」とは，点の集まりぐらいに思ってくれれば結構です．

いきなり幾何学を $(*)$ のように定義されて困惑している人もいるかもしれません．ここで，

平面幾何において基本的な作業は長さと角度を測ることで
他のすべての作業はこれらを組み合わせて行われていた

ことを思い出してください．実際，幾何の問題といえば，長さと角度に関することばかりではなかったでしょうか．（「合同（相似）を証明する問題もあったよ」と思う人もいるかもしれませんが，合同（相似）条件を考えれば，そのような証明はすべて長さと角度を求

[*1] 射影幾何の舞台である射影空間には，普通の意味では長さや角度は定まっていません．つまり，この定義では射影幾何は幾何学ではないということになってしまいます．射影幾何も包括したようなより現代的な幾何学の定義の説明は，最終日に譲ることにします．

めるという作業に帰着されたことに注意しましょう）．このことを考慮すれば，先に述べた幾何学の定義 $(*)$ が妥当に思えてはこないでしょうか．

1.2　ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何

前項では，幾何学の定義を $(*)$ で定めました．この定義にしたがって，**ユークリッド幾何（Euclidean geometry）**を，

私たちが普段使っている 長さと角度が
定まっている空間（ユークリッド空間）[*2]を調べる理論

と定義しましょう．この定義に対応して，**非ユークリッド幾何（non-Euclidean geometry）**を，

私たちが普段使っているものとは異なる 長さと角度が
定まっている空間を調べる理論

と定義することにします．ここで，この定義は原則的には本講義だけで通用する定義であると思ってください（非ユークリッド幾何の定義としては，「平行線公理を満たさない幾何」を採用する場合がほとんどです）．ただし，前項で述べた球面幾何はここでの定義においても，「非ユークリッド幾何」といえることがわかります．

球面幾何の例からもわかるように，

一般に考える空間が異なればその空間での長さと角度は異なる

ということに注意してください．

1.3　幾何学と相対性理論

さて，そろそろ冒頭の疑問，すなわち相対性理論と幾何学の関係について答えることにしましょう．

非常に大雑把に述べると，

相対性理論とは時間，空間，物質を統一した物理理論

といった感じです．3 節で詳しく説明しますが，相対性理論の数学的枠組みとして，**ミン**

[*2] ユークリッド空間の厳密な定義は，付録 D の定義 D.12 を見てください．

コフスキー空間 (**Minkowski space**) というものが挙げられます．そして，ミンコフスキー空間にもきちんと長さや角度が定まっています．すなわち，

ミンコフスキー空間を介して，相対性理論と幾何学が繋がる

のです！これが冒頭の疑問に対する答えです．さらにいえば，ミンコフスキー空間に定まっている長さや角度は，もちろんユークリッド空間のものとは異なります．これより，ミンコフスキー空間の理論をミンコフスキー幾何と呼ぶことにすると，

ミンコフスキー幾何は非ユークリッド幾何である

と考えられることがわかります．

前置きが長くなりましたが，次の節から具体的に相対性理論について考えていくことにしましょう（「幾何」についてより深く知りたい人は付録 D の一読を薦めます）．

2 特殊相対性理論速修

この節では，特殊相対性理論の概要を解説します．具体的には，

- 特殊相対性理論の「特殊」と「相対」とは
- 特殊相対性理論の 2 つの原理（特殊相対性原理と光速度不変の原理）
- 上記の原理から導かれる様々な現象（時間の遅れ，長さの縮み，$E = mc^2$）

について，説明したいと思います．

2.1 「特殊」と「一般」

相対性理論は，特殊相対性理論と一般相対性理論の 2 種類に分けられます．大雑把に書けば，特殊相対性理論は基礎の理論で，一般相対性理論は特殊相対性理論を発展させた理論ということになります．

もう少し詳しく書くと，特殊相対性理論はある物理現象を観測する人が，一定の速度で動いている場合のみを考えている理論です（次項で詳しく説明しますが，ある物理現象を考える際に「どのような立場から観測するか」ということは非常に重要な問題であることに注意してください）．それに対して一般相対性理論では，観測者が加速しながら動いている場合（もっと言えば，重力に関すること）も包括している理論です．すなわち，

特殊相対性理論の「特殊」とは一定の速度で動くような「特殊」な観測者しか考えない

という意味です．ここで，観測するもの自体は加速していても構いません．

また，前節では相対性理論を「時間，空間，物質を統一した物理理論」と述べました．その関係で説明すると，

特殊相対性理論とは時間と空間を統一した物理理論

と考えることができます．[*3]

本講義では，特に特殊相対性理論を扱うことにします．その理由として，一般相対性理論を少し真面目に扱おうとするとかなり高度な数学[*4]を必要となる一方で，特殊相対性理論の概観を知るにあたってはそこまで高度な数学知識を要求されないからです．ただし，特殊相対性理論の範疇であっても，直感に反するような興味深い現象について説明することが可能ですので，楽しめることは間違いないと思います．[*5]

2.2 「相対」と「絶対」

この項では，相対性理論の「相対」とは何かということを追求していくことにしましょう．「相対」という言葉を辞書を引いてみると，“他との関係の上に存在あるいは成立していること”（デジタル大辞泉）と書かれていました．もう少し噛み砕いて説明すると，

「相対」とは何を基準にして考えるかで変わること

といった感じです．

突然ですが，以下の問題を考えてみてください：

$$2\text{ 次方程式 } x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ を解け}$$

[*3] 一般相対性理論では，時空（時間と空間）の関連性に加えて，物質が時空に与える影響まで説明することができます．時空と物質の関係を記述する方程式を，アインシュタインの方程式（重力場の方程式）といいます．アインシュタインの方程式は，テンソルと呼ばれる，座標系に依らない形式で表現されています．

[*4] **リーマン幾何 (Riemannian geometry)** をフル活用します．リーマン幾何とは，非常に簡単に書けば，各点で内積が与えられている「曲がった」空間で展開される幾何といった感じです．

[*5] 線形代数（多変数の 1 次式，すなわち平面のような「まっすぐな」空間を調べる理論）の知識さえあれば，特殊相対性理論はほとんどマスターできます．なぜなら，等速直線運動を考えることは，「まっすぐな」空間を考えることとほぼ同義だからです（等速直線運動は，時間と空間（変位）という変数について，1 次式で書けることに注意してください）．一方，一般相対性理論（加速度・重力が働く場合）を考えるには，「曲がった」空間を考える必要があります（重力が空間を「曲げる」からです）．このような理由から，一般相対性理論を扱うためには，「まっすぐな」空間の理論（線形代数）だけでなく，「曲がった」空間の理論（リーマン幾何）が必要になるのです．

さて，この問題は簡単でしょうか，それとも難しいでしょうか．中学一年生が多いこの教室では，「難しそう」と答える人が多いかもしれません．しかし，高校二年生に聞いたら「簡単だ」と答える人しかいないでしょう．このように，「2 次方程式の難しさ」は誰に問うかによって異なることから，相対的なものであるといえます．

ここで，「相対」という概念をより理解するために，その反意語である「絶対」について考えてみると，

「絶対」とは何を基準にしようが変わらないこと

といった意味です．では，今度は次のような問題を考えてみてください：

リーマン予想[*6]の真偽を定め，それを証明しろ

こんなことを問われたら，皆さんはもちろん，世界中の数学者が例外なく「難しい」と答えることでしょう．したがって，「リーマン予想の証明の難易度」は誰に問おうが難しいと答えるに違いないので，（少なくとも現時点では）絶対的なものといえます．

ここで，

私たちの日常感覚では時間や空間の概念は絶対的なものである

ということを注意しておきます．つまり，細かな誤差を無視するのであれば，「私の時計で計った 1 秒間」と「あなたの時計で計った 1 秒間」は一緒であり，「私の物差しで測った 1cm」と「あなたの物差しで測った 1cm」は一緒といった感覚です．このような感覚に疑問を持つ人はあまりいないと思います．

2.3　特殊相対性原理

またまた突然ですが，時速 100 km で走る電車の中で，進行方向に時速 100 km でボールを投げるとしましょう（ただし，電車もボールも加速・減速は一切しないと仮定します．以降，このことはいちいち断らないことにします）．このとき，電車の外にいる人からはボールの速さは時速何 km に見えるでしょうか．答えは簡単ですね．$100 + 100 = 200$ より，答えは時速 200 km です．一方，電車の中にいる人にとっては，もちろんボールの速さは時速 100 km のままです．このように，

[*6] リーマン予想とは，素数の分布に関する超有名な未解決問題ですが，あまりの難しさに 100 万ドルの懸賞金が掛けられています．そのような問題はミレニアム懸賞問題とよばれており，リーマン予想の他にもまだ 6 つの未解決問題が残されています．

観測する人によってボールの速度は変わって見えるので，ボールの運動は相対的である

と考えることができます．そのような速度の見え方を**相対速度**といいます．

「ボールの運動は相対的」と書きましたが，私たちは普段，ボール以外の運動も相対的に捉えています．というのも，「時速 100 km」の電車といったとき，それは「地上から計測して時速 100 km」と捉えるのが普通です．しかし，実際には私たちの地面は決して静止していません．地球は自転をし，太陽の周りを公転していますね．つまり，私たちは「地面は静止している」とみなして，運動を相対的に観測しているのです．

ここで鋭い人は，「運動を相対的に考えるのはいいが，どの場所を基準に考えるかで物理法則は変わってしまわないのか？」という疑問を持つかもしれません．この疑問に対する 1 つの答えが**ガリレイの相対性原理**です．ガリレイの相対性原理とは，**観測者のいる場所が静止していても，動いていても，それが等速でさえあれば，物体の運動に関する法則は同一である**という原理のことです．

しかし，ガリレイの相対性原理には大きな欠陥がありました．それは，

ガリレイの相対性原理は電磁気学の法則には適用できない

ということです．電磁気学とはその名の通り，電気と磁気に関する現象を扱う物理分野の 1 つであり，理論的に非常に整った分野です．そのような整然とした理論体系にガリレイの相対性原理を適用できないことに疑問を感じたアインシュタインは，ガリレイの相対性原理を拡張して，

観測者のいる場所が静止していても動いていても
それが等速でさえあれば すべての物理法則 は同一である

という，**特殊相対性原理（special principle of relativity）**[*7]が成り立つような物理学（相対論）を提唱したのでした．この特殊相対性原理を仮定することによって，常識とはかけ離れたことが新たに仮定されてしまいます．それは一体 $\cdots$？

[*7] 特殊相対性原理にある「等速」の仮定を外したものを，**一般相対性原理（general principle of relativity）**といいます．すなわち，一般相対性原理とは，**「すべての座標系において，物理法則は不変である」**という非常に美しい原理です．これを数学の言葉に翻訳すれば，「すべての物理法則はテンソルに関する方程式で表される」ということになります．

2.4 光速度不変の原理

秒速 10 万 km のロケットに乗った人が，ロケットの中で進行方向に秒速 30 万 km の光を発したとします．すると，ロケットの外の人から考えると，その光は秒速何 km に見えるでしょうか．さきほどの相対速度の計算を思い返せば，$10 + 30 = 40$ より，秒速 40 万 km に見えるでしょう．ところが，**実験をしてみるとそうはなりません**．では秒速何 km に見えるのでしょうか．答えは，秒速 30 万 km，すなわち，

一定の速度で動く観測者から見ると光速は変化しない[*8]

のです．これを，**光速度不変の原理 (principle of invariant light speed)** といいます．つまり，

光は絶対的な運動をする

ということです．実際，1964 年に CERN というヨーロッパの研究機構がパイ中間子という粒子を用いて光速度不変の原理を実証しました．この実験をはじめとした，これまで世界中で行われてきた数々の実験の中に，光速度不変の原理に反するような例は見つかっていません．

そのような実験ができる時代でもないのに，アインシュタインはなぜ光速度不変の原理などという直感に反するようなものを原理としたのでしょうか．それには前項で述べた特殊相対性原理に関係があります．というのも，**光速の値は実は電磁気学の法則から導かれる**ものです．したがって，

特殊相対性原理を仮定すれば，光速度不変の原理は要請されてしかるべき仮定になる

のです．なぜなら，光速は電磁気学の法則から自動的に決まる値であるためもし光速が観測者によって変わってしまったら電磁気学の法則も観測者によって変わってしまうことになり，電磁気学の法則が観測者によって変わってしまったら「すべての物理法則は観測者に依らない」という特殊相対性原理に矛盾してしまうからです．

次項で述べるように，この光速度不変の原理から私たちの直感に反するような様々な現象が導かれてしまいます！光速度不変の原理こそ，特殊相対性理論の核心といっても過言ではありません．

---

*8 ただし，媒質が変われば光速は変化します．

2.5　光速度不変の原理からの帰結 1

この項では**時計の遅れ (time dilation)** について解説したいと思います．時計の遅れとは何か，結論から先に書いてしまえば，

動いているものの時間は進み方が遅くなる

ということです．つまり，「A 君から見て，A 君の時計で 10 分経過したとき A 君に対して動いている B 君の時計はまだ 1 分しか経過していない」というようなことが起こりうるのです．こんなことを突然言われても，日常の経験に照らし合わせたら信じる人はいないと思いますから，実際にその妥当性を説明したいと思います．以降，簡単のために光速は秒速 30 万 km であるとします．[*9]また，以下の 2 つを仮定することにします：

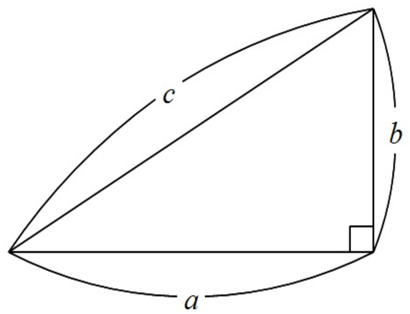
- 光の直進性（光の軌跡が直線であること）[*10]
- 光速以上の速度で運動するものは存在しない

それともう 1 つ，有名な**ピタゴラスの定理**をこの先で用いるので，念のため述べておきます．

ピタゴラスの定理　直角三角形の斜辺の長さの 2 乗は，残りの 2 辺の長さの 2 乗の和に等しい．すなわち，右図において，

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ．



ではまず，この後の議論でとても重要になる**光時計 (light clock)** を導入しましょう．光時計とは，発光装置から 15 万 km の距離を隔てて鏡が置かれている巨大な筒で、

光を放ってから反射して戻って来るまでの時間を 1 秒とみなす時計

です（図 2.1）．

[*9] 厳密には，「光速は有限である」という仮定が入っています．

[*10] 重力の影響を考えると光は曲がってしまいますが，それは一般相対性理論の範疇なのでここでは考えないことにします．

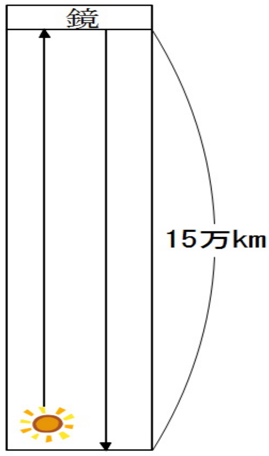


図 2.1

さて，この光時計を地上に置いたとします（以下，電車の外のことを，地上と呼ぶことにします）．光時計の定義から明らかですが，光は 1 秒間かけて時計を往復します．次に，この光時計を水平方向に走る電車に乗せたとします．

2.2 節で述べたように時間が絶対的なものであるということを前提にすれば

光時計が電車の外にあろうが内にあろうが，往復するのにかかる時間は 1 秒に決まっているというのが日常感覚です．実際，もっとわかりやすくなるように，地上と電車内で同時にボールを手から落とすという状況を考えてみてください．地上の計測者からみて，ボールが床に到達するまでの時間は地上だろうが電車内だろうが変わらないことは明らかでしょう．

しかし，

光速度不変の原理を前提にすれば

このことは成り立ちません．その理由を説明しましょう．ポイントは，

地上の人から見ると，光時計の光源から出た光は斜めに進んで見える

ということです．なぜなら，電車は地上の人から見ると動いているので，光時計自体も動いて見えるからです（図 2.2）．ちなみに，光ではなくボールであったらその軌跡は（運動方程式を解けばわかるように）放物線になります．光の直進性の仮定がここに効いています．

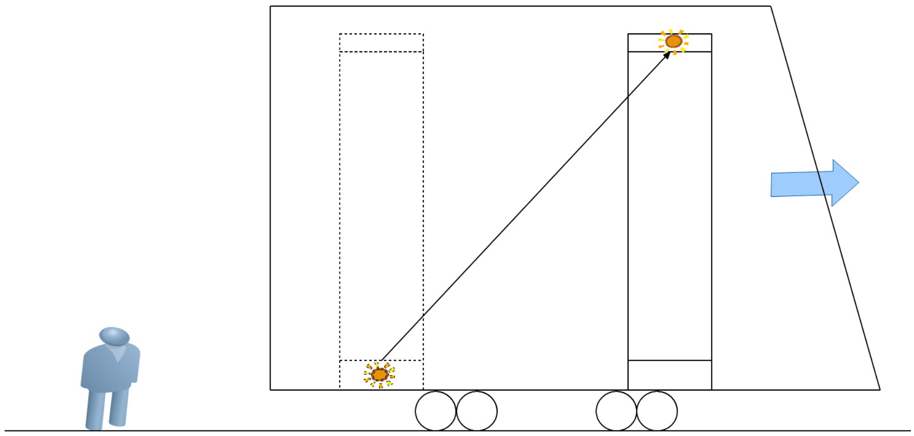


図 2.2

この斜めに進む光の経路ですが、これはピタゴラスの定理から，垂直方向よりも長い距離です．しかし，

光速度不変の原理より光はあらゆる方向に一定の速度で動く

ので，地上の光時計で光が鏡に到達する時間（0.5 秒）では，電車内の光時計の光はまだ鏡の場所には到達できません．なぜなら，繰り返しになりますが，斜め方向の経路の方が垂直方向の経路よりも長いからです．つまり、地上の人から見ると，地上の光時計の 0.5 秒を指している時点で動いている光時計はまだ 0.5 秒を指していないのです．鏡に反射して戻ってくる場合も同じ時間がかかるので，

地上の人から見て，地上の光時計が 1 秒を指すとき
電車内の光時計はまだ 1 秒を指していない

ということになります．これが，時間が遅れる（ゆっくり進む）という意味です．

それでは，具体的にどれぐらい時間が遅れてしまうかを計算してみましょう．ここで，光時計の高さは 15 万 km でしたが，毎回その数を書くのは面倒なので，光時計の高さを a とおいてしまいます．また，地上の人から見て，電車は水平方向に常に速度 v で走っているとします．さらに，光速を c とおきましょう．いまの状況をよりよく理解するために，光の経路だけを取り出してみます（図 2.3)．床の光源の位置を A，鏡で反射した位置を B，床に到着した位置を C，さらに，点 B から床に下ろした垂線の足を D とします．

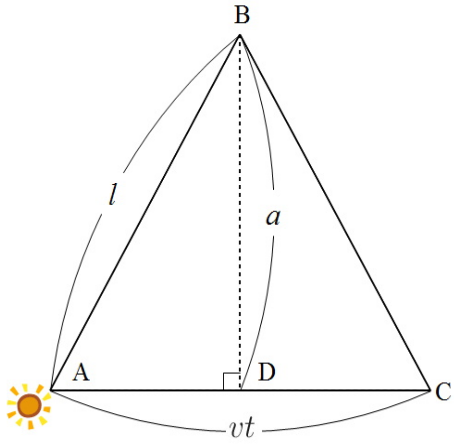


図 2.3

さて，地上の人から見た電車内の光の往復時間 T を，以下の手順で求めてみましょう．

Step 1　線分 AD の長さを求める

電車の速度は v なので，辺 AC の長さ（電車が進んだ距離）は vT ですね．ここで，三角形 BAC は二等辺三角形なので，点 D は辺 AC の中点であることに注意してください．よって，線分 AD の長さは $vT/2$ になります．

Step 2　線分 AB の長さを求める

光の片道の経路 AB の長さを求めましょう．線分 AB の長さを l とおきます．ここで，三角形 ABD は直角三角形なので，**ピタゴラスの定理**が使えます．線分 BD の長さ（光時計の高さ）が a であることに注意すると，ピタゴラスの定理より，

$$l^2 = a^2 + \left(\frac{vT}{2}\right)^2$$

が成り立ちます．両辺の平方根をとれば，$l > 0$ より，

$$l = \sqrt{a^2 + \left(\frac{vT}{2}\right)^2}$$

となります．

Step 3　T を求める

あとは，$2l$ を 地上の人からみた 光の速度で割れば，T が求まりますね．ここで，

光速度不変の原理より電車がどんな速度で走っていようが
地上の人からみた光の速度は c のまま

です．したがって，

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{2l}{c} && \leftarrow \text{時間=距離÷速度} \\
T &= \frac{2\sqrt{a^2 + \left(\frac{vT}{2}\right)^2}}{c} && \leftarrow l \text{ に値を代入} \\
(cT)^2 &= 4\left\{a^2 + \left(\frac{vT}{2}\right)^2\right\} && \leftarrow \text{両辺に } c \text{ を掛けて，両辺 2 乗する} \\
(c^2 - v^2)T^2 &= 4a^2 && \leftarrow T \text{ について整理} \\
T &= \frac{2a}{\sqrt{c^2 - v^2}} && \leftarrow \text{両辺を } c^2 - v^2 \text{ で割り，平行根をとる}
\end{aligned}
$$

となり，T が求まります（最後の変形ですが，p.8 の仮定より $v < c$ なので，安心して行うことができます）．

Step 4　T を変形する

いま，光が光時計を往復する時間を 1 秒と定義していたことを思い出してください．光時計の往復の距離は $2a$ なので，

$$
\frac{2a}{c} = 1
$$

が成り立ちますね．これを使えば，T は以下のように変形できます．

$$
T = \frac{2a}{\sqrt{c^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{2a}{c\sqrt{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}
$$

よって，

$$
T = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{2.1}
$$

となりました．いま，T の定義が「地上の人から見た電車内の光の往復時間」であったことを思い出しましょう．すると (2.1) は，地上の人が，「電車内の光時計の光が鏡を反射して床に到着した瞬間」に地上の光時計を見ると，地上の光時計はすでに $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 秒を指しているということを意味しています（「すでに」と書いたのは，$\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$ より，$1/\sqrt{1 - v^2/c^2} > 1$ であるからです）．ここで，「電車内の光時計の光が鏡を反射して床に到着した瞬間」とは，光時計の定義から，「電車内の光時計が 1 秒を指す瞬間」のことです．したがって，

地上の人から見ると，電車内の光時計が $\mathbf{1}$ 秒を指しているときに地上の光時計を見ると
地上の光時計はすでに $\boldsymbol{1/\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 秒を指している

ということです．文字ばかりで頭がこんがらがっている人もいるかもしれないので，実際に計算してみましょう．速さが光速の 12/13 倍，すなわち，$v = 12c/13$ の電車を考えてみます．すると，

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{\frac{144}{169}c^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

なので，

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{13}{5} = 2.6$$

となります．これは，

地上の人から見ると，秒速 $\boldsymbol{12c/13}$ の電車内で $\mathbf{1}$ 秒経ったとき
地上ではすでに $\mathbf{2.6}$ 秒経っている

ということです．

一般に，(2.1) は，

ある観測者に対して動いている光時計は
観測者の光時計の $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$ 倍遅れる（ゆっくり進む）

ということを意味します．この時間の遅れ具合のことを，**ローレンツ因子 (Lorentz factor)** といい，γ（ギリシャ文字のガンマ）で表します．すなわち，

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}}$$

となります．この γ を用いると，

地上の人から見ると，地上の光時計が $\mathbf{1}$ 秒を指しているとき
電車内の光時計はまだ $\boldsymbol{1/\gamma}$ 秒しか指していない

ということがわかります．実際，地上の光時計が 1 秒を指しているとき，電車内の光時計が x 秒を指しているとしましょう．地上の人から見ると，電車内の光時計は地上の光時計

よりも γ 倍遅れるので，

$$x \times \gamma = 1$$

という式が成り立ちます．したがって，$x = 1/\gamma$ と求まりますね．このローレンツ因子 γ は今後非常に重要な定数になってきます．

確認のため，もう一度具体的に計算してみましょう．速さが光速の 0.8 倍，すなわち，$v = 4c/5$ の電車を考えてみます．すると，

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{\frac{16}{25}c^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

となります．これは，

地上の人から見ると，地上で 1 秒経っていても
秒速 $4c/5$ の電車内ではまだ 0.6 秒しか経っていない

ということです．

このことは日常の経験に照らし合わせたら，にわかに信じがたいことでしょう．というのも，日常生活で運動しているものの速度は光速に比べたら非常に小さいので，時間の遅れを体感することはないからです．式で書けば，$v/c \approx 0$（記号「$\approx$」は「ほとんど同じ」という意味です）より，

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$$

となり，ローレンツ因子は 1 です．すなわち，地上の人から見て，地上の人の 1 秒は，電車内の人の 1 秒と同じということになり，時間の遅れはないのです．そのような理由もあり，動くものの時間が遅れるなんて到底信用できないという人もいることでしょう．ところが，ミューオンという光速に近い速度で宇宙から地上に降り注ぐ素粒子の寿命を観測することによって，実際に時間の遅れを確かめられることが知られています．もう少し詳しく説明すると，ミューオンは寿命が短く，宇宙から降り注いでも地表にたどり着く前に寿命が尽きてしまいます．しかし，実際には地上でかなりの量のミューオンが観測されています．これは，ミューオンが光速に近いスピードで動くことから，時間の遅れが生じ，寿命が延びていることが原因なのです．

2.6　2.5 節の補足

2.5 節の議論に関して，重要な注意が 2 つあります．

- 時間はお互いに遅れる

　2.5 節において，光時計を地上と電車内に置き，それを地上の人の視点から議論しました．では，同じ状況を，電車内の人の視点で考えるとどうなるでしょうか．まず思い浮かぶのが，

「動いているものの時間はゆっくり進むのだから
逆に動いているものから見たら静止しているものの時間は早く進むのでは？」

ということです．しかし，これは**誤り**です．なぜなら，

電車内の人からみたら自分が静止していて地上の人が動いている

からです．ここで注意したいのは，

光速は絶対的な量だが「動いている，静止している」という関係は相対的な関係

ということです (2.3 節で述べた，**運動の相対性**を思い出してください)．したがって，2.5 節での議論がそのまま適用できて，電車の中の人から見たら，地上の人の時間は遅れてしまいます．つまり，

時間はお互いに遅れる

のです．これは，

時間は絶対的なものではなく相対的なものである

ということを意味しています．

　ここで，

「時間が互いに遅れるのならお互いが再会したらどうなるのか？」

という疑問が浮かぶかもしれませんが，そのような状況は考える必要はありません．なぜなら，

いまは等速で動く観測者しか扱っていないので
その観測者が引き返してくるという状況はあり得ない

からです（引き返すためには逆向きの「加速」が必ず必要です！）．そのような状況を考えることは一般相対性理論の範疇ですが非常に興味深いことでもあるので，次節で改めて扱いたいと思います．

- 光時計の時間と実際の時間

　注意深い人は気付いたかもしれませんが，2.5 節の議論の中盤までは「光時計で計った時間」について述べていたのに，後半ではいつの間にかただの「時間」にすり替っています．ここに疑問を持つ人もいるかもしれませんが，その「すり替え」には正当性がきちんとあります．実際，2.4 節で述べたように，光速は電磁気学の基礎方程式から導かれてしまう値です．そして，電磁気力は身の回りの時計の動力であることはもちろん，人間が感じるほとんどの力の根源であることがわかっています（ただし，重力は除いています）．したがって，光時計だけが他の時計と独立して遅れるということは考えられないのです．つまり，

光時計が遅れるということは
「私たちが普段使っている時計」も遅れるということを意味している

のです（ここで，「私たちが普段使っている時計」とは，腕時計や電波時計，体内時計など，私たちの周りのありとあらゆる時計と称させるもののことを指しています）．

2.7　光速度不変の原理からの帰結 2

最後に，時間の遅れ以外に 2 つ，光速度不変の原理からの帰結を簡単に紹介したいと思います．

- 長さの縮み

　まずは，**長さの縮み (length contraction)** です．これは，

観測者に対して動いているものの長さは
動いている方向に対して縮む

ということです．そして実は，

その縮みの割合は $1/\gamma$ 倍，すなわち $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 倍に縮む

ということがわかっています．

　話を簡単にするために，前項と同じく，光速の 0.8 倍の速度（秒速 24 万 km）で進む電車と，全長 40 万 km のトンネルを考えます．ここで，少し物騒ですが，この電車内の時計で考えて 1 秒後に爆発する時限爆弾が，電車に仕掛けられていたと

します．ただし，この爆弾は，電車がトンネルを抜けると解除されるように設計されています．普通に考えれば，電車は爆破されてしまいますが，**実は結論は違います**．その理由を説明しましょう．

まず，地上の時計で計ると，電車がこのトンネルを抜けるには，

$$40 \div 24 = 1.6777\cdots$$

より約 1.67 秒（正確には 5/3 秒）かかります．ところが，

このことを地上の人の時計で計ると
光速の 0.8 倍で走る電車の中では 1 秒しか経過していない

ことがわかります．実際，動いているものの時間はゆっくり進みその遅れ具合を表すローレンツ因子は 2.5 節で計算した通り 5/3 なので，1 秒 $\times\, 5/3 = 5/3$ 秒 となり，地上の時計と合いますね．したがって，爆弾はギリギリ解除されます（爆弾は，「電車内の時計で」1 秒後に爆発することに注意してください）．

さて，この状況を電車の人が見るとどうなるでしょうか．電車内で 1 秒経過したとき，電車はまだ 24 万 km しか進んでいません．つまり，全長 40 万 km のトンネルを通過できないので，電車は爆破されてしまいます．これでは矛盾が起きてしまいますね．ここで，

私たちは光速度不変の原理という常識に反する原理を前提にしていたので
私たちの常識を疑う必要がある

と考えましょう．つまり，

動いているものは縮む

と考えるのです．何が動いているかというと，

電車内の人から見ればトンネルが時速 24 万 km で
近づいてきているように見える（運動の相対性）

のです．どのぐらい縮んでいればいいかというと，$24/40 = 3/5$ より，3/5 倍（ローレンツ因子の逆数！）に縮んでいればいいということがわかります．

今の議論を一般化すれば，最初に述べたように，動いているものの縮みの割合は常にローレンツ因子の逆数になります．つまり，

時間と同様に空間も絶対的なものではなく相対的なもの

なのです．したがって，

光速度不変の原理を前提にすることによって
2.3 節で述べたような時間と空間は絶対であるという概念は破られた

ということになります．

- $E = mc^2$

次に，**質量とエネルギーの等価性 (mass-energy equivalence)** です．これは言葉で書くよりも，次の式を見てもらった方が早いかもしれません（E がエネルギーで，m が質量です）：

$$\boldsymbol{E = mc^2} \tag{2.2}$$

どうですか，どこかで一度は見覚えがあるのではないでしょうか．(2.2) は，アインシュタインによる世界で最も有名な式ともいわれています．なぜ特殊相対性理論におけるエネルギーが (2.2) で表されるのか気になった人は，付録 B を見てみてください．

(2.2) の直感的な説明をしましょう．そのために，2.5 節で述べた，

光速以上の速度で運動するものは存在しない

という仮定を思い出してください．ここで，燃料を大量に積んだロケットを考えましょう．燃料をどんどん燃やして（すなわちエネルギーを消費して）加速していったとしても，先に述べた仮定により，ロケットの速度は光速以上になることはありません．ではそのエネルギーはいったいどこに消えてしまったんでしょうか．相対性理論の結論は，

エネルギーは質量になった

ということであり，そうすると実際に辻褄が合うのです．というのも，（運動方程式からわかるように，）与えるエネルギーの大きさ，すなわち与える力が一定ならば，質量が増えれば増えるほど加速しにくくなります．つまり，速さは増えにくくなるわけです．まとめると，エネルギーを得ることによってロケットは少しずつ光速に近づきますが，その分ロケットの質量も少しずつ増え，質量が増えていくにつ

れ加速しにくくなるので，結局ロケットはいつまでたっても光速以上にはなれないという理屈です．このことも今まで述べてきた現象と同様で，理屈が通るというだけでにわかには信じがたいことかもしれません．しかし，加速器という，粒子を加速する装置を用いることで，実際にエネルギーが質量に変換されていることが実験によって確かめられているのです．ここで，

質量は速度によって変化する

ということにも注意してください．

アインシュタインが (2.2) を提唱するまで，質量とエネルギーは別々の概念だと思われていました．ところが，(2.2) は，

エネルギー $\boldsymbol{E}$ と質量 $\boldsymbol{m}$ は変換可能なものであり
その変換の係数が光速の 2 乗である

ということを主張しているのです．ここで，光速の 2 乗というのは莫大な数字です．実際，

1g の物質が，90 兆ジュールものエネルギーを潜在的に持っている

ことになります．これは，約 8 万世帯が 1 カ月に消費する電気エネルギーと必要と同等です．ただし，実際に物質の質量をエネルギーに変換することは容易ではありませんから，きっと当時の科学者たちはこのことを信じなかったでしょう．しかし，1938 年にドイツの化学者オットー・ハーンとオーストリアの化学者リーゼ・マイトナーは，ウランの原子核に中性子を当てると原子核分裂が起こり，同時に大量のエネルギーが放出されることを発見しました．より具体的には，ウランの原子核が分裂すると質量の約 0.1% が失われ，条件次第では核分裂反応はねずみ算的に爆発的な速さで進行し，その失われた質量が $E = mc^2$ の式によってエネルギーに変換されるのです．そして悲しいことに，人類はこのエネルギーを真っ先に殺戮兵器へと応用しました．そうです，1945 年の 8 月に広島と長崎へ投下された原子爆弾です．このエネルギーの平和利用（原子力発電）が始まったのは 1951 年のことでした．

3　特殊相対性理論の数学的枠組み

前節では，特殊相対性理論の物理的な基礎知識を説明しました．この節では，特殊相対性理論の数学的枠組みであるミンコフスキー空間について解説します．[*11]1 節で触れましたが，

特殊相対性理論とは幾何学としてのミンコフスキー空間論を物理的に解釈したものである

といえます．この節では，

- 光速度不変の原理を根拠にした，ミンコフスキー空間の導入
- ローレンツ変換（ミンコフスキー空間における座標変換）
- ローレンツ変換を用いた，ミンコフスキー幾何の特徴づけ

を扱いたいと思います．

3.1　ミンコフスキー空間

私たちは今まで，時間と空間を絶対的なものと見なしていました．数学的に表現すれば，時間変数 t と空間変数 (x, y, z) を，互いに無関係な変数として考えていました．しかし，前節で述べたように，

特殊相対性理論では光速が絶対的な量であり
時間と長さ (空間の尺度) は絶対的な量ではない

のです．これを考慮して，特殊相対性理論とマッチする 4 次元空間を定義したいと思います（「4 次元」としたのは，時間 1 次元，空間 3 次元で，合わせて 4 次元だからです）．

とはいったものの，ただ軸を 4 本並べた座標空間ではなんの解決にもなりませんね．なぜなら，光速度不変の原理がまったく反映されていないからです．ここで，私たちは 1.1 節において，幾何学を「長さと角度が定まった空間を調べること」と定義していたことを思い出してください．つまり，どんな空間においても，「長さ」という概念は本質的な要素になっているのです．さらにもう 1 つ，2.7 節において，光速度不変の原理の帰結とし

[*11] 一般相対性理論でもミンコフスキー空間は重要です．一般相対性理論では，曲がってはいるけれども部分的にはミンコフスキー空間になっているような空間（きちんと書けば，「各点の接平面がミンコフスキー空間になっているような 4 次元多様体」）を考えるからです．

て，動いているものの長さが変化してしまったことを思い出してください．すると，

「長さ」を工夫して定義してやらないと
光速度不変の原理とマッチする空間を見つけられないのではないか

という予測がつきませんか．そのような空間を，以下の観点に着目して迫ってみましょう．

- 光と物体の長さの関係

　光が，ある長さのトンネルを進むとします．このとき，光にとって，このトンネルの長さはいくつに見えるでしょうか．2.7 節で述べたように，動いているものの長さは $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍に縮みます．光から見ると，トンネルが光速 c で動いているように見えるので，トンネルの長さは $\sqrt{1-c^2/c^2}=\sqrt{1-1}=0$ 倍，すなわち，長さ 0 となってしまいます！これはトンネルの長さがいくつであろうと結果は変わりません（当たり前ですが，どんな値に 0 を掛けても 0 のままだからです）．つまり，

光にとって，どんなものの長さも 0 である

ということがいえます．これは，光速度不変の原理を取り込む上で大きなヒントになりそうです．

- ユークリッド空間における長さ

　ユークリッド空間における長さが，どのような式で与えられているかを考えてみることにします．長さを測る対象としては線分がまず挙がると思いますが，それを少しだけ拡張して，ベクトルを考えてみましょう．**ベクトル（vector）とは，**線分に向きの概念を付与したもので，**矢印**をイメージしてもらえれば十分です．ここで，ベクトルは位置とは無関係なことに注意しましょう．なぜなら，平行移動しても，その長さと向きという量は変わらないからです．標語的に書けば，

ベクトルとは，向きと長さの等しい矢印をすべて同じものと見なしたものである

といった感じです．ベクトルは，「$\vec{a}$」のように，アルファベットの上に矢印を乗せて表記します．

　次に，ベクトルの長さを求めたいのですが，そのために座標平面を考えましょう（座標がないと，長さの基準が決まりませんね）．前述した通り，ベクトルは平行移動しても変わらないので，ベクトル $\vec{a}$ の始点を原点 O にくるように平行移動してみます（図 3.1）．

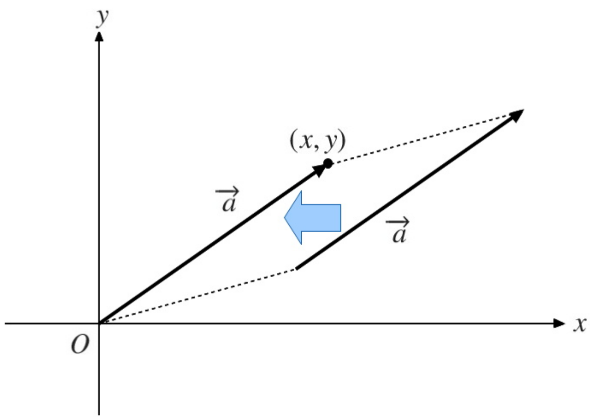


図 3.1

このとき，終点の平行移動した先の座標が (x, y) であるとき，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{a} = (x, y)}$$

と表記します．これを，**ベクトルの成分表示**といいます．これより，平面上のベクトルと 2 つの実数の組とが一対一に対応していることがわかります．
よって，$\overrightarrow{a}$ の長さは，ピタゴラスの定理より，$\sqrt{x^2 + y^2}$ となります（図 3.2 を見てください）．$\overrightarrow{a}$ の長さを $|\overrightarrow{a}|$ と表記することにすれば，

$$\boldsymbol{|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}} \tag{3.1}$$

が成り立ちます．

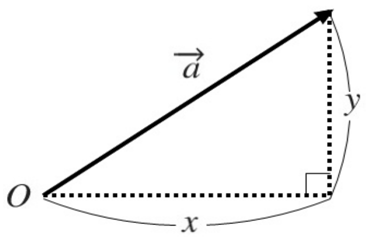


図 3.2

すなわち，

2 次元ユークリッド空間において
$\boldsymbol{\overrightarrow{a} = (x, y)}$ と成分表示されるベクトルの長さは $\boldsymbol{\sqrt{x^2 + y^2}}$ である

ということがわかりました．これを**ユークリッドの長さ（Euclidean norm）**と名付けることにします．

いま述べたことは，平面（2 次元）が空間（3 次元）になっても成り立ちます．そして，もっと高次元になろうが成り立ちます．すなわち，ユークリッド空間における 4 次元ベクトル

$$\overrightarrow{a} = (x, y, z, w)$$

の長さは

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

で与えられるのです．

- 時空における長さ

さて，簡単のため 2 次元の時空を考えましょう．2 次元の時空の点は (x, t) と表せます．[*12] ここで，前節と同様に光速を c とおけば，時空において光を表す式は，

$$t = \frac{x}{c} \tag{3.2}$$

となっています．「光を式で表す」という意味が少しわかりにくいかもしれませんが，「光が速度 c で等速直線運動していることを式で表現する」ということです．そのために，「距離を速度（今の場合は光速）で割ったら時間になる」という当たり前の式を利用しました．ここで，光と長さの関係（光にとって，どんなものの長さも 0 である）を思い出すと，私たちは，

どんな $\boldsymbol{x}$ に対しても，$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ の長さが 0 になるように

時空における長さを定義したいのです．ここで，$\overrightarrow{a}$ のユークリッドの長さを測ってみても，(3.1) と (3.2) から，

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + t^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{c^2}}$$

となり，これが 0 になるのは，$x = 0$ のときだけです．ここで気になる点が 2 つほど見えてきます．それは，

- **$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{t}$ は単位が違うのに，それを $\boldsymbol{x^2 + t^2}$ のように足し算してもいいのか**
- **ユークリッドの長さはルートの中身が 2 乗された 2 数の和なので，それが 0 になるのが $\boldsymbol{x = 0}$ となるときだけなのは当然のことではないのか**

[*12] (t, x) と，座標軸を逆に表記する流儀もあります．

という 2 点です．

そこでこれらを踏まえて，時空における長さを

$$\|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\| = \sqrt{|\boldsymbol{x^2 - (ct)^2}|} \tag{3.3}$$

と定義してみましょう（ユークリッドの長さ $|\cdot|$ と区別するために，二重棒の記号 $\|\cdot\|$ を用いました）．ユークリッドの長さからの修正点として，まず，t を ct に変えました．その心としては，時間を長さに変換するには何かしらの速度を掛ける必要がありますが，いま光速 c が非常に特別な意味を持つ値であることを考慮して，t に光速 c を掛けてみたということです．次に，ルート内の「+」を「−」に変えました．その心としては，正の数の和が 0 になることはあり得ないので，和を差に変えてみたということです．さらに，ルートの中身が負になるのはあまり嬉しくないので，絶対値を付けました．すると，(3.2) より，

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{|x^2 - (ct)^2|} = \sqrt{\left|x^2 - (c \cdot \frac{x}{c})^2\right|} = \sqrt{|x^2 - x^2|} = 0$$

となり，

$\|\overrightarrow{a}\|$ の値はどんな x に対しても 0 となる

ことがわかります．したがって，これが望みの長さになりそうです．そこで，(3.3) で定義された時空における長さを**ミンコフスキーの長さ（Minkowski norm）**と名付けましょう．このことは，ユークリッド空間と同様に，次元が何次元であろうと成り立ちます．よって，時空における 4 次元ベクトル $\overrightarrow{a} = (x, y, z, t)$ の長さは，

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{|x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2|}$$

で与えられます．

以上を踏まえ，**ミンコフスキー空間（Minkowski space）**を，

ミンコフスキーの長さが定まった，4 次元空間

と定義します．今までの説明をきちんと読んでいる人の中には，「角度はどうしたんだ」と思う人もいることでしょう．ここでは詳しくは扱いませんが，ベクトルの内積という概念を用いることでミンコフスキー空間における角度もきちんと定義できます（詳しくは，

付録 D の D.2 節に書きました）．ちなみに，ミンコフスキーというのは，アインシュタインの数学の先生であると同時に，数学が不得意 (?) であったアインシュタインに代わって特殊相対性理論の数学的基礎を築いた数学者です．

ところで，ユークリッドの長さ (3.1) とミンコフスキーの長さ (3.3) は非常に似た表式ですね．この 2 つの長さは，虚数時刻という概念を用いることで，表向きには統一できます．そのために**虚数単位（imaginary unit）**を導入しましょう．虚数単位 i とは，

$$\boldsymbol{i^2 = -1}$$

となる数のことです．また，実数 a，b に対して $a + bi$ で表される数を**複素数**といい，実数でない複素数を**虚数**といいます．[*13]

さて，虚数単位 i を用いて，**虚数時刻**を $\boldsymbol{it}$ で定義します．ミンコフスキーの長さの表式 (3.3) において，t を虚数時刻 it でおきかえてみると，

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{|x^2 - (cti)^2|} = \sqrt{|x^2 - (ct)^2(-1)|} = \sqrt{x^2 + (ct)^2}$$

となります．すると，これはユークリッドの長さの表式 (3.1) において，$y = ct$ とおきかえたものと一致します！[*14]このことから，

虚数という概念が
ユークリッド幾何とミンコフスキー幾何の狭間に横たわっているのでないか

という推測が立てられないでしょうか．これについては 4 節でまた登場するので，頭の片隅に入れておいてください．

3.2　ローレンツ変換

以下，簡単のため，空間は 1 次元に制限したミンコフスキー空間を考えることにします．というのも，数学的な扱いにおいて，空間の次元数はいくらであろうとこれ以降の議論に本質的な違いは生じないからです．2 次元ミンコフスキー空間とそこでの光の軌跡は，図 3.3 のようになります．

[*13] 複素数などといった数が本当に存在するのかという疑問がわいてくるかもしれませんが，ハミルトンという数学者は「実数の対（つい）」を考えることで論理的に複素数の世界を構成しました．虚数は世の中に目に見えて現れてくる数ではないですが，既存概念と矛盾なく定義できるのであれば，数学ではそれを確かな存在として認めるのです．

[*14] y を ct でおきかえることは物理的には意味を持ちませんが，数学的には変数変換をしただけです．ただし，虚数を用いない限りは，どんな変数変換をしたところで，ユークリッドノルムとミンコフスキーノルムを一致させることはできないということに注意してください．

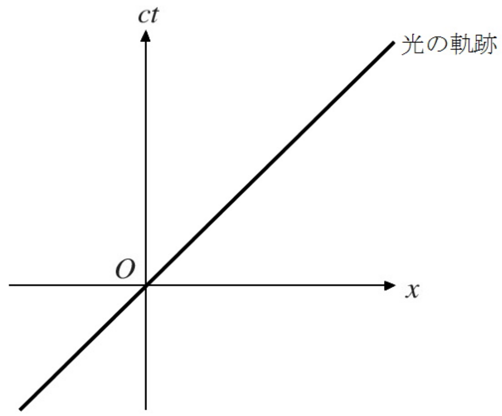


図 3.3

3.1 節で述べたように，単位を合わせるため，ct 軸になっていることに注意してください．また，光の軌跡は (3.2) より，

$$ct = x$$

と書けるため，$x - ct$ 平面において原点を通る傾き 1 の直線になっています．この説明だけでわかりにくければ，$ct = y$ とおいてみましょう．そうすると，$y = x$ となり，これは $x - y$ 平面における傾き 1 の直線になりますね．あとは，y を ct に置き直せばいいのです．

さて 2 節の後半では，ある事象を等速で動く観測者から見ることによって，時間が遅れたり，長さが短くなったりといった相対論的現象が生じることをみました．つまり，

「どのような観測者から見るか」によって長さと時間の尺度が変わってしまった

のでした．いま，ある観測者 A さんの長さと時間の尺度を (x, ct) とします．また，A さんから見た，B さんの速度を v，B さんの長さと時間の尺度を (x', ct') とします．すると，実は以下のような関係が成り立っています（ここでは証明は省きますので，詳しくは付録 A を参照してください）：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = \gamma(x - \beta ct)} \\ \boldsymbol{ct' = \gamma(-\beta x + ct)} \end{cases} \tag{3.4}$$

ただし，γ は前節で定義したローレンツ因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{3.5}$$

であり，β は

$$\beta = \frac{v}{c}$$

で定義される，速度と光速の比です．このように，

観測者を A さんから B さんに変える こと

を**ローレンツ変換（Lorentz transformation）**といいます．

また，ローレンツ変換をより数学的に説明すれば，

ミンコフスキー空間における座標変換

ということになります．さらに，前述した長さと時間の尺度 (x, ct)，(x', ct') を数学に翻訳すれば，ミンコフスキー空間の座標軸に対応することになります（図 3.4）．

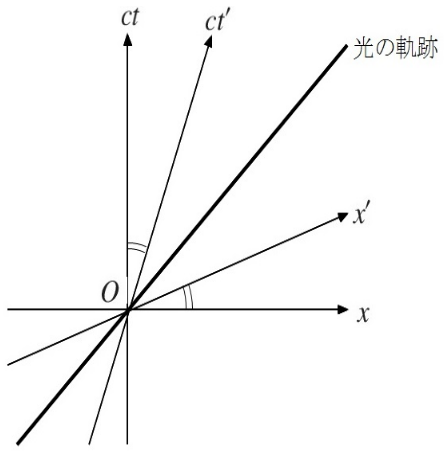


図 3.4

このとき実は，x'–ct' 軸は，x–ct 軸を回転させたものになってます．実際，$t' = 0$ のときそれは x' 座標軸を表していますが，(3.4) の第 2 式目から，

$$0 = \gamma(-\beta x + ct) \qquad \therefore \quad ct = \beta x$$

が成り立ち，上式は $x - ct$ 平面における傾き β の直線を表しています．ただし，x'–ct' 座標は一般には直交していません（斜交座標といいます）．さらに，x 軸と x' 軸がなす角と，ct 軸と ct' 軸がなす角は，同じであることに注意してください．なぜなら，光速度不変の原理より，x'–ct' 座標においても，$ct' = x'$ が成り立たないといけないからです．これは，x'–ct' 座標においても，光の軌跡は原点を通る傾き 1 の直線になっていないといけ

ないということを意味しています．このことを実現するためには，変換後の座標軸は光の軌跡に対して線対称になっていないといけないですね．

文字式ばかり羅列されて疲れてしまったかもしれないので，具体的に計算してみましょう！題材とするのは，**浦島効果（Rip van Winkle effect）**とよばれるものです．

問題　双子の兄弟，地上君とロケット君がいます．2 人の 20 歳の誕生日にロケット君は，地上から見て $\frac{24}{25}c$ という恐ろしく速い速度のロケットで，地上を旅立ちました．ロケット君は，ロケット君の時計で考えた 7 年間飛び，地点 A に到着後，向きを変えて同じ速度で地上に帰りました．ロケット君が地上に到着したとき，ロケット君は $20+7\times 2=34$ 歳ですが，地上君は何歳になっているでしょうか．

この問題の解答ですが，ローレンツ変換 (3.4) を使います．そのために，何はともあれまずローレンツ因子を計算してみましょう．すると，

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(\frac{24}{25}c)^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{24}{25}\right)\left(1-\frac{24}{25}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{7^2}{25^2}}}$$

より，

$$\gamma=\frac{25}{7}$$

となります（因数分解の公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を用いました）．また，ロケット君が旅立ったときを原点に取ると，ロケット君にとって地点 A の座標は，$(x',t')=(0,7)$ です（図 3.5）．ここで，

ロケット君からみると，自分は静止していると思っているので $\boldsymbol{x'=0}$ である

ことに注意してください．さらに，$\beta=\frac{24}{25}$ なので，これらを (3.4) に代入すると，

$$\begin{cases} 0=\dfrac{25}{7}(x-\dfrac{24}{25}ct) \\ 7c=\dfrac{25}{7}(-\dfrac{24}{25}x+ct) \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} 0=25x-24ct \ \cdots \ ① \\ 49c=-24x+25ct \ \cdots \ ② \end{cases}$$

すると，$① \times 24+② \times 25$ より，

$$49c\times 25=(25^2-24^2)ct=(25+24)(25-24)ct=49ct$$

となるので，

$$t = 25$$

と求まります（これを①に代入すれば，$x = 24c$ も求まります）．これは，地上の時計では，ロケット君が地点 A に到着するまでに 25 年かかるということを意味しています（再び図 3.5 を見てください）．地点 A から地上までも同じ時間がかかるので，地上君の年齢は，$20 + 25 \times 2 =$ **70** 歳ということになります．すなわち，

> **34 歳になったロケット君が地上に帰ったとき，双子であるはずの地上君は 70 歳になっている**

ということです．ロケット君はまさに浦島太郎になってしまったわけです！

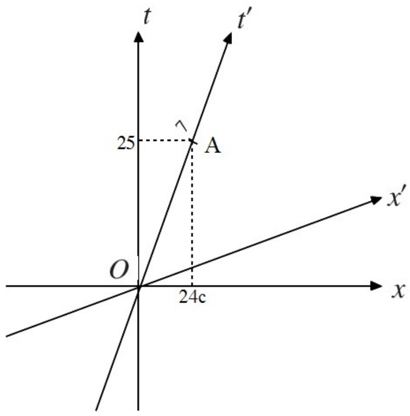


図 3.5

ここで，2.6 の説明を理解している人ならば，次のような疑問が浮かぶかもしれません：

> 「ロケット君からみたら，地上君が恐ろしい速度で遠ざかっていくように見える（これが運動の相対性だ）．だから，同じ論法で，ロケット君の方が年上になっていることも証明できるんじゃないか？」

相対論が世に出た頃，この問題は一種のパラドックスとみなされていました．なぜなら，上記のことが証明されてしまったら，相対論に矛盾が発生してしまうからです．これを，**双子のパラドックス（twin paradox）**といいます．しかし，実はこれはパラドックスではありません．なぜなら，

ロケット君は地点 A で引き返しているので
それに伴う減速と加速が必要になり運動の相対性が崩れてしまう

からです．2.1 節で述べたように，加速度運動する観測者を扱うためには，一般相対性理論が必要になります．実際，一般相対性理論を使えば，何の矛盾も生じることなくこの問題を論じることができます．

補足ですが，ローレンツ変換を使えば，2.5 節と 2.7 節で説明した時間の遅れと長さの縮みをきちんと証明できます．また，2.4 節で述べたように特殊相対性理論では相対速度が単純な速度の和とはなりませんが，速度の合成則が実際どういう式で表せるかということもローレンツ変換を用いて証明できます．このあたりのことはローレンツ変換の導出とともに付録 A にまとめたので，興味ある人は見てみてください．

3.3　ミンコフスキー幾何の新たな特徴づけ

3.1 節ではミンコフスキー空間を特徴づける量であるミンコフスキーの長さを，3.2 節ではミンコフスキー空間における座標変換であるローレンツ変換を学びました．このミンコフスキーの長さとローレンツ変換には実はとても重要な関係があります．それは，

ミンコフスキーの長さはローレンツ変換をしても不変である

ということです．これは簡単な計算で証明できます．3.2 節の記号を踏襲することにすると，(3.3) より，

$$x'^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2$$

を証明すればいいことになります（2 乗してルートを外しました）．(3.4)，(3.5) より，

$$\begin{aligned}
x'^{\,2} - (ct')^2 &= \gamma^2 \left\{ (x - vt)^2 - c^2 \left(-\frac{v}{c^2}x + t \right)^2 \right\} \\
&= \gamma^2 \left\{ x^2 - 2xvt + v^2t^2 - c^2 \left(\frac{v^2}{c^4}x^2 - 2\frac{v}{c^2}xt + t^2 \right) \right\} \\
&= \gamma^2 \left\{ x^2 - 2vxt + v^2t^2 - \frac{v^2}{c^2}x^2 + 2vxt - c^2t^2 \right\} \\
&= \frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \left\{ (1 - \frac{v^2}{c^2})x^2 + (v^2 - c^2)t^2) \right\} \\
&= x^2 - \frac{c^2}{c^2 - v^2}(c^2 - v^2)t^2 \\
&= x^2 - (ct)^2
\end{aligned}$$

なので，

$$x'^{\,2} - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2$$

が成り立ちます．つまり，

ミンコフスキーの長さはローレンツ変換による不変量

なのです．ここで，不変量とは「ある変換を施しても変わらない量」のことを指します．例えば，数学で対称式と呼ばれる式があることを知っている人も多いと思いますが，対称式は「文字の入れ換え」という変換に関する不変量となっています．

さて，ミンコフスキー幾何の定義が

「ミンコフスキーの長さが定まった空間を調べる理論」

であったことを思い出してください．ミンコフスキーの長さがローレンツ変換で不変であることを踏まえると，

ミンコフスキー幾何とは，ローレンツ変換による不変量が定まった空間

ということになります．標語的に書けば，

ミンコフスキー幾何とは，ローレンツ変換による不変理論

となります．ここで，具体的な量を「変換による不変量」という何とも抽象的なものに書きかえてしまったことに違和感を覚える人も少なくないと思います．ここであえてそのような抽象的な表現をしたのは，

不変量は幾何学において非常に重要な概念である

からであり，実際に幾何学は不変量を基につくられるといっても過言ではないからです．詳しくは最終日に譲りますが，

特殊相対性理論（ミンコフスキー幾何）が
「光速」という不変量を基盤にして展開されていった

ことからも不変量の重要性がわかるのではないでしょうか．

4　ユークリッド幾何とミンコフスキー幾何の関係

ユークリッド幾何とミンコフスキー幾何の構造の関係を示すことでこの講義を締めくくりたいと思います．具体的には，

- ユークリッド幾何における座標変換と不変量
- 双曲線関数によるローレンツ変換の表示
- ユークリッド幾何とミンコフスキー幾何を繋ぐモノ

の 3 つを述べたいと思います．

4.1　ユークリッド幾何再考

前節では，ミンコフスキー空間における座標変換にあたるものがローレンツ変換であることを説明しました．では，ユークリッド空間における座標変換とはどのような変換でしょうか．その 1 つに**回転 (rotation)** があります．回転という変換はローレンツ変換と比べれば直感的にもわかりやすい変換ですが，式で書き下せと言われたら実は少し難しいです．回転は式で表現するために，円関数（三角関数）と呼ばれる関数を導入することにしましょう．

以下，図 4.1 を適宜参照しながら読んでみてください．半径 1 の円上の点 $P(x, y)$ に対して，$\overrightarrow{OP} = (x, y)$ と x 軸とのなす角を θ（ギリシャ文字で，シータと読みます）とします (ただし，角は反時計回りに測ることにします)．このとき，点 P の x 座標と y 座標を，それぞれ $\cos\theta$（コサインシータ）と $\sin\theta$（サインシータ）と定義します．式で書けば，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \cos\theta} \\ \boldsymbol{y = \sin\theta} \end{cases} \tag{4.1}$$

ということです．また，直線 OP の傾きを $\tan\theta$（タンジェントシータ）と定義します．式で書けば，

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

となります．3 つの関数 $\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ は円を基盤に据えて定義された関数であるので，**円関数（circular function）**とよばれることがあります．ここで，「三角関数と一緒じゃないか」と思う人もいるかもしれませんが，わざわざ円関数という表現をしたのには理由があり，それは 4.2 節の最後で明らかになります．

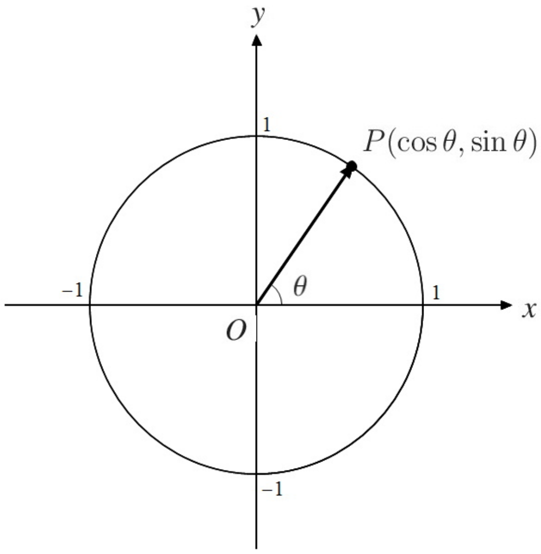


図 4.1

さて，ベクトル $\overrightarrow{a} = (x, y)$ を角 θ 回転させたベクトルを $\overrightarrow{a'} = (x', y')$ とすると，円関数を用いることによって以下の関係が成り立ちます：

$$\begin{cases} x' = \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y \\ y' = \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y \end{cases} \tag{4.2}$$

この証明ですが，考え方や記号が少々複雑なので，付録 C に回したいと思います．

ここで重要なことは，

ユークリッドの長さは回転で不変になっている

ということです．これを証明するために次の事実を用います：

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{4.3}$$

この式は，点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にあることから従います．ここで，x–y 平面における点 O を中心とする半径 1 の円は，$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$，すなわち，$x^2 + y^2 = 1$ と表されることに注意してください．これは，点 O を中心とする半径 1 の円の定義が，「点 O からユークリッドの長さで測った距離が 1 である点を集めたもの」だからです．したがって，(4.2)，(4.3) より，

$$
\begin{aligned}
{x'}^2 + {y'}^2 &= (\cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y)^2 + (\sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y)^2 \\
&= \cos^2\theta \cdot x^2 - 2\cos\theta\sin\theta \cdot xy + \sin^2\theta \cdot y^2 \\
&\qquad\qquad + \sin^2\theta \cdot x^2 + 2\sin\theta\cos\theta \cdot xy + \cos^2\theta \cdot y^2 \\
&= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)x^2 + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)y^2 \\
&= x^2 + y^2
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
{x'}^2 + {y'}^2 = x^2 + y^2
$$

が成り立ちます．つまり

ユークリッド幾何とは，回転による不変理論

ということができます．ただし，実際には回転以外にも長さと角度を不変にする変換があることを注意しておきます（たとえば，平行移動や線対称移動）．ここで，ユークリッド幾何における座標変換による不変量の重要性を説明します．そのために，まず合同の定義を思い出しておきましょう．（一般的な教科書における）2 つの多角形が合同であることの定義は，「2 つの多角形を適当に移動させることで，片方を他方にぴったりと重ねられること」でした．しかし，注意深く考えると 1 つの疑問が浮かびます．それは，

図形を移動させることで図形自身が変化してしまうことがあるのではないか？

という疑問です．そんなことありえないと思う人もいるかもしれませんが，例えば現実世界において適当な物体を海の底深くまで移動させたとすると，その物体は圧力でどんどん変形していってしまいますね．このように，現実世界では場所によって働く力が変わってしまう（すなわちすべての座標が平等でない）ため，合同の概念は意味を持ちません．では合同の概念に意味を持たすためにどうするか？その答えとなるのが合同公理です．合同公理とは，「多角形はその形を変えずに自由に移動させることができる」という公理です．これをもう少し数学的に述べれば，「多角形の長さと角度を変えないような座標変換が存在する」ということです．つまり，

合同公理の本質は長さと角度が不変量となる座標変換の存在を保証すること

だったのです．したがって，ユークリッド幾何学のほとんどすべての定理が合同公理から導かれていたことに注意すれば，座標変換による不変量の重要性がわかるのではないしょうか．

さて，回転は円関数で表示できていました．さらに，先ほども述べましたが，円とは，ある点からユークリッドの長さで測った距離が一定である点を集めた図形です．すると，

「ミンコフスキーの長さで測った距離が一定である点を集めた図形とは何か？」

という疑問がわいてこないでしょうか．実際，特に距離を 1 として，その図形を式で表現すれば，(3.3) より，

$$x^2 - (ct)^2 = \pm 1$$

となります．特に $x^2 - (ct)^2 = 1$ は，図 4.2 のような双曲線になっています（点線のグラフは，反比例でおなじみの直角双曲線ですが，2 つの双曲線は「回転」で重なります）．よって，

双曲線関数なるものがあれば，ローレンツ変換を表示できるのではないか

という期待が高まります．

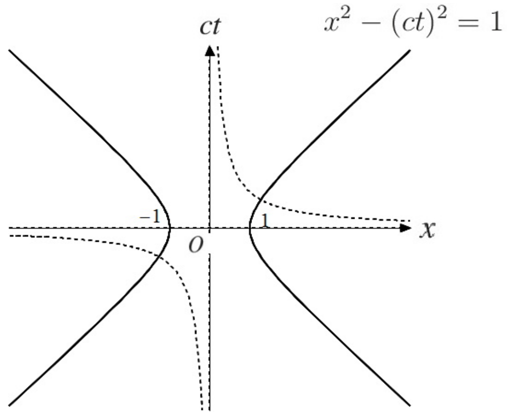


図 4.2

4.2　双曲線関数とローレンツ変換

さて，3.1 節の最後において，虚数がユークリッド幾何とミンコフスキー幾何の狭間に横たわっているのではないかという大胆な予想を立てました．そこで，虚数の世界で非常に有名な**オイラーの公式**に登場してもらいましょう．e をネイピア数（ただの定数だと思ってくれて結構です），i を虚数単位（確認ですが，虚数単位とは $i^2 = -1$ を満たす数

のことです）としたときに，すべての実数 θ について次の等式が成り立ちます：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4.4}$$

ここで，少々天下り的ですが，オイラーの公式において，θ を $-\theta$ にしてみましょう．$\cos(-\theta) = \cos\theta$ と $\sin(-\theta) = -\sin\theta$（図 4.1 でその理由を考えてみてください）に注意すれば，

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \tag{4.5}$$

が成り立ちます．これより，(4.4) と (4.5) の和を取り 2 で割れば，

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{4.6}$$

となります．一方，(4.4) と (4.5) の差を取り，2 で割れば，

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{4.7}$$

となります．(4.6) と (4.7) の右辺を見ると，θ に $i\theta$ を代入してみたいという気持ちになりませんか．[*15]そうすれば，$i \cdot i = -1$ より，右辺の虚数が消えてくれるからです．ということで，まず (4.6) において，θ を $i\theta$ とすれば，

$$\cos(i\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \tag{4.8}$$

となります．また，(4.7) において，θ を $i\theta$ とすれば，

$$\sin(i\theta) = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i}$$

となります．また，上式の両辺に $-i$ を掛けると

$$-i\sin(i\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \tag{4.9}$$

[*15] ただし，厳密に言えば，(4.6) と (4.7) の左辺の θ に $i\theta$ を代入できるかわかりません．なぜなら，三角関数はまだ実数でしか定義していないからです．複素関数の三角関数を定義するには，ベキ級数展開（雑に書けば，無限次の多項式で表すこと）を使うのがポピュラーですが，その収束性などをきちんと説明しようとすると面倒な議論がたくさん待っています．ただし，その部分さえ認めてしまえば，オイラーの公式も容易に導くことができます．

と変形できます．ここで，(4.8) と (4.9) より，

$$
\begin{aligned}
\{\cos(i\theta)\}^2 - \{-i\sin(i\theta)\}^2 &= \left\{\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\right\}^2 \\
&= \frac{e^{2\theta}+2+e^{-2\theta}}{4} - \frac{e^{-2\theta}-2+e^{2\theta}}{4} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となります ($e^{\theta}\times e^{-\theta} = e^{\theta-\theta} = e^0 = 1$ に注意してください)．したがって，$\cos(i\theta) = X$，$-i\sin(i\theta) = Y$ とでもおいてやれば，

$$X^2 - Y^2 = 1$$

となります．これは X–Y 平面における双曲線の式です！これより，

$$\cosh\theta = \cos(i\theta) \tag{4.10}$$

$$\sinh\theta = -i\sin(i\theta) \tag{4.11}$$

と定義します．また，円関数には $\tan\theta$ もあったことを考慮して，

$$\tanh\theta = -i\tan(i\theta) \tag{4.12}$$

と定義します．

3 つの関数 $\cosh\theta$（ハイパボリックコサインシータ），$\sinh\theta$（ハイパボリックサインシータ），$\tanh\theta$（ハイパボリックタンジェントシータ）は**双曲線関数 (hyperbolic function)** とよばれています．

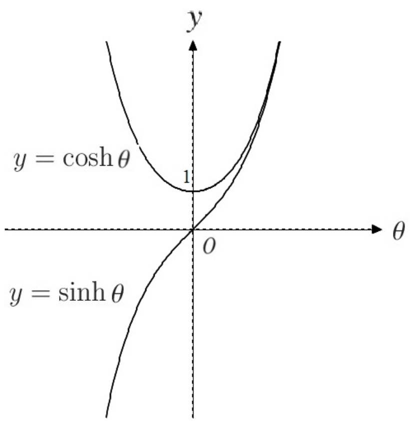


図 4.3

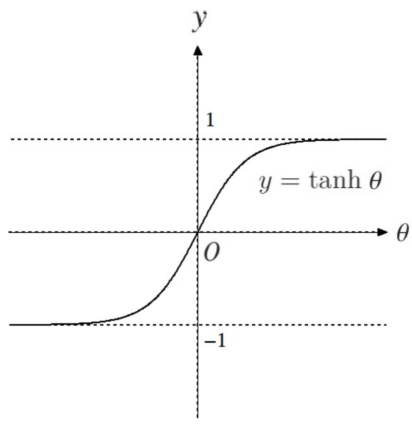


図 4.4

さて，4.1 節で示唆した通り，実はローレンツ変換は双曲線関数で表示できます．まず，ローレンツ変換は

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}x - \dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}t \\ t' = -\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}t \end{cases} \tag{4.13}$$

と書けます．ただし，いま簡単のため (3.4) において $c = 1$ としました．これは物理的には意味を持ちませんが，数学的にはただ座標を少し調整しただけです（ct を新たに t とおけばいいのです）．

ここで，$\tan\theta$ の定義は，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{4.14}$$

でしたが，この式の θ を $i\theta$ におきかえれば，双曲線関数の定義から，

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} \tag{4.15}$$

が成り立ちます．また，(4.3) の両辺を $\cos^2\theta$ で割れば，

$$1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

となります．この式と，(4.14) より，

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

となります．先と同様にして，θ を $i\theta$ におきかえれば，

$$1 - \tanh^2\theta = \frac{1}{\cosh^2\theta} \tag{4.16}$$

という式が得られます．ここで，

$$v = -\tanh\theta \tag{4.17}$$

とおく[*16]と，(4.16) より，

$$1 - v^2 = \frac{1}{\cosh^2\theta}$$

[*16] 注意深い人は，本当にそのような θ が存在するかが不安になるかもしれませんが，きちんと存在します．実際，$\tanh\theta$ が狭義単調増加な連続関数であること（図 4.4）を認めれば，$\tanh\theta$ の逆関数 $\tanh^{-1}\theta$ が存在するので，$\theta = -\tanh^{-1} v$ とすればいいことがわかります．

となります．$\cosh\theta$ は 1 以上の値をとること（図 4.3 を見てください）ことに注意すれば，

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{4.18}$$

と求まります．よって，(4.15) に，(4.17) と (4.18) を代入すると，

$$\sinh\theta = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \tag{4.19}$$

となります．以上より，(4.13) に (4.18) と (4.22) を代入することによって，

$$\begin{cases} x' = \cosh\theta\cdot x + \sinh\theta\cdot t \\ t' = \sinh\theta\cdot x + \cosh\theta\cdot t \end{cases} \tag{4.20}$$

が成り立ちます．よって，ローレンツ変換が双曲線関数で表示できることがわかりました．すなわち，

速度を用いて物理的に表記された (4.13) を
角度を用いて幾何的に表記したものが (4.20) である

と捉えることができます．このことからも，3 節の冒頭で述べた「特殊相対性理論とは幾何学としてのミンコフスキー空間論を物理的に解釈したものである」ということの意味がわかるのではないでしょうか．

ここで，ローレンツ変換が双曲線関数で表示できるのではないかという大胆な予想を立てられた根拠を思い出して下さい．それは，**「ユークリッド空間における座標変換は回転であり，回転は円関数で表現でき，円関数の『円』とはユークリッドの長さで測った距離が一定の点の集合である」という事実において，**

ユークリッド空間 $\longleftrightarrow$ ミンコフスキー空間，　回転 $\longleftrightarrow$ ローレンツ変換
円関数 $\longleftrightarrow$ 双曲線関数，　円 $\longleftrightarrow$ 双曲線
ユークリッドの長さ $\longleftrightarrow$ ミンコフスキーの長さ

という対応関係をあてはめてみたからでした．このことから，三角関数をわざわざ円関数として再定義した理由が理解できるのではないかと思います．

また，回転の式 (4.2) とローレンツ変換の式 (4.20) は非常に似通った形になっていますね．3.2 節において，「x'–ct' 軸は，x–ct 軸を回転させたものになっている」と書きましたが，その正当性がここにもあります．実際，ローレンツ変換は**双曲回転**とよばれることもあるのです．

4.3　2 つの幾何の架け橋

3.1 節の最後に虚数時刻 it なるものを導入しました（いま $c = 1$ としていることに注意してください）．4.2 節の結果を踏まえると，

虚数の角 $i\theta$ を考えてみたくなる

のではないでしょうか．実際，回転の式 (4.2) において，y と y' をそれぞれ it と it' に，そして θ を $i\theta$ におきかえてみると，

$$\begin{cases} x' = \cos(i\theta) \cdot x - i\sin(i\theta) \cdot t \\ it' = \sin(i\theta) \cdot x + i\cos(i\theta) \cdot t \end{cases} \tag{4.21}$$

が成り立ちます．ところで，$\sinh\theta$ の定義式である (4.11) は，両辺に i を掛けることで，

$$i\sinh\theta = \sin(i\theta) \tag{4.22}$$

と変形できます．(4.21) に，$\cosh\theta$ の定義式 (4.10) と (4.22) を代入すれば，

$$\begin{cases} x' = \cosh\theta \cdot x + \sinh\theta \cdot t \\ t' = \sinh\theta \cdot x + \cosh\theta \cdot t \end{cases}$$

となります（第 2 式目は両辺を i で割りました）．何とこの式はローレンツ変換 (4.20) と同じになるのです！まとめれば，

時間と角を虚数に変換することで回転とローレンツ変換が繋がる

ということです．そして，ユークリッド幾何とは「回転による不変理論」（4.1 節）であり，ミンコフスキー幾何とは「ローレンツ変換による不変理論」（3.3 節）でした．これらの事実を集約すれば，

ユークリッド幾何とミンコフスキー幾何は，虚数を介して繋がる

ということがわかります．すなわち，

虚数は，ユークリッド幾何とミンコフスキー幾何の架け橋である

と結論づけられるのです．有名な事実として，オイラーの公式 (4.4) は「虚数が指数関数（左辺）と三角関数（左辺）の架け橋となっている」ということを示していますが，この節で述べてきたことからも虚数は橋を架けるのが得意な数だということがわかりますね．

このページ以降は，本文で述べられなかったいくつかの事項を付録として載せます．付録はある程度高校数学に慣れた人向けに書いているということを注意しておきます．また，本文とは異なり，記述形式も一般の数学書にやや近いものにしてあります．

付録 A　ローレンツ変換についての補足

この付録では，まずローレンツ変換の表示式を証明します．そのあとに，本文において光時計を用いて「説明」した時間の遅れと長さの縮みを，ローレンツ変換を用いてきちんと証明しましょう．最後に，ローレンツ変換を用いて相対論における速度の合成則を証明します．

A.1　ローレンツ変換の導出

この項では，ローレンツ変換の表示式，すなわち次の定理を証明します．ただし，証明における計算の都合上，本文とは表記を変えています（ct を 1 つの変数とは思っていない）．

定理 A.1（ローレンツ変換）

2 つの座標系 S と S' があり，S' の原点 O' は S の原点 O に対して相対速度 v で運動しているとする．ただし，S 系の座標を (x, t)，S' 系の座標を (x', t') とおく．このとき，

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma v t \\ t' = -\gamma \dfrac{v}{c^2} x + \gamma t \end{cases} \tag{A.1}$$

が成り立つ．ただし，c は光速を表す定数であり，γ は

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

で定義されるローレンツ因子である．

定理の主張に「座標系」という言葉が使われていますが，これは「どのような観測者から見るか？」という意味です．すなわち，「S' の原点 O' は S の原点 O に対して相対速度 v で運動している」とは，「S 君を基準に考えると，S' 君は速度 v で動いている」ということを意味しています．

定理の証明のために，特殊相対性理論の基本原理を思い出しておきましょう。

特殊相対性原理

慣性系において，すべての物理法則は同一である．

光速度不変の原理

慣性系において，光速度は不変である．

ただし，慣性系とは，等速直線運動する座標系のことを指します．この 2 つの基本原理が，ローレンツ変換導出のカギになります．さらにもう 1 つ，連立方程式の解法に関する定理を準備しておきます（そのような，ある定理を証明する際に道具となる命題を**補題**といいます）．

補題 A　2 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} Ax + Bt = \alpha \\ Cx + Dt = \beta \end{cases}$$

の解 x，t は，$AD - BC \neq 0$ ならば，

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{AD - BC}(D\alpha - B\beta) \\ y = \dfrac{1}{AD - BC}(-C\alpha + A\beta) \end{cases}$$

と表示できる．また，$AD - BC = 0$ ならば，与えられた 2 元連立 1 次方程式の解は存在しないか，1 つに定まらない．

証明　前半の主張は，加減法で変数を消去すれば容易に示せます．具体的には，第 1 式に D を乗じ第 2 式に B を乗じて 2 式を足し合えば，

$$(AD - BC)x = D\alpha - B\beta \tag{A.2}$$

となり，t が消去できます．さらに，$AD - BC \neq 0$ の仮定から両辺を $AD - BC$ で割れば，望みの x の表示式が求まります．同様にして，t の表示式も示すことができます．

後半の主張は，(A.2) において，$AD - BC = 0$ とすれば，

$$0 \cdot x = D\alpha - B\beta$$

となりますが，$D\alpha - B\beta \neq 0$ ならば $0 \cdot x \neq 0$ となり，この式を満たす x は存在しません（すなわち解を持たない）．また．$D\alpha - B\beta = 0$ ならば $0 \cdot x = 0$ となり，この式はどんな x に対しても成り立ちます（すなわち解は 1 つに定まらない）．これより，結論が従います．　□

準備が整ったので，定理の証明に入りましょう．まず，S 系から S' 系への座標変換であるローレンツ変換は

$$\begin{cases} x' = ax + bt \\ t' = dx + et \end{cases} \tag{A.3}$$

と，1 次式で書けていると仮定することができます．というのも，もしローレンツ変換に 2 次以上の項が入っていると，S 系で等速直線運動（1 次式）だったものが S' 系では加速度運動（2 次式以上）になってしまうことがありますが，それぞれの座標系は互いに等速直線運動をしているのだから，これは起こり得ません．したがって，ローレンツ変換は 1 次式で書けることがわかりました．*17 さらに，

$$ae - bd \neq 0 \tag{A.4}$$

も仮定することができます．このことを背理法で示すために，$ae - bd = 0$ と仮定しましょう．(A.3) を x, t を未知数とする 2 元連立 1 次方程式とみなすと，補題 A からこの連立方程式は x, t について解くことができません（解が存在しないか 1 つに定まらない）．言い換えれば，この変換は S 系から S' 系への非可逆変換（一方通行の変換）になってしまうということです．ところが，このことは特殊相対性原理に矛盾します．なぜなら，特殊相対性原理はすべての慣性系は対等であることを主張していますが，変換が非可逆になるということは S 系と S' 系が対等でないことを意味しているからです．したがって，$ae - bd \neq 0$ が示せました．

さて，(A.3) における a, b, c, d を決定できれば，ローレンツ変換の式が求まります．そのためにまず，S' 系の原点 O' を考えます．仮定より O' は S 系に対して速度 v で動いているので，O' は S 系において，

$$x = vt$$

*17 これは数学的に厳密な証明にはなっていません．きちんと証明するには，線形代数の知識が必要になります．実際，「直線を直線に写し，原点を原点に移す，可逆な変換」は線形変換に限られることが証明できます．

と表すことができます．一方，O' は S' 系の原点であるので，O' は S' 系において，

$$x' = 0$$

と表すことができます．これら 2 式は同時に成り立っていなければいけないので，それらを (A.3) の第 1 式に代入すれば，

$$0 = a(vt) + bt \qquad \therefore \quad (av + b)t = 0$$

となりますが，この式が任意の t について成り立っていないといけないので，

$$b = -av \tag{A.5}$$

が得られます．また，S 系の原点 O を考えてみましょう．すると，仮定より O は S' 系に対して速度 $-v$ で動いていますので，O は S' 系において，

$$x' = -vt'$$

と表せます．先と同様にして $x = 0$ も成り立つので，2 式を (A.3) に代入すれば，

$$\begin{cases} -vt' = bt \\ t' = et \end{cases} \qquad \therefore \quad b = -ev$$

したがって，(A.5) と合わせれば，

$$e = a \tag{A.6}$$

が従いますね（ただし，$v = 0$ のとき証明することはないので $v \neq 0$ を仮定しました．）．

次に，光速度不変の原理を定式化しましょう．光速度 c は S 系と S' 系どちらから見ても不変なので，

$$x = ct, \quad x' = ct'$$

が成り立たなければいけません．これらを (A.3) に代入すると，

$$\begin{cases} ct' = act + bt \\ t' = dct + et \end{cases}$$

が得られるので，第 2 式に c を乗じて t' を消去すれば，

$$act + bt = dc^2t + ect$$

となります．したがって，(A.5) と (A.6) を代入すれば，

$$act - avt = dc^2t + act \qquad \therefore \quad d = -\frac{av}{c^2} \tag{A.7}$$

が成り立ちます．さらに，(A.5)-(A.7) を (A.3) に代入すれば，

$$\begin{cases} x' = a(x - vt) \\ t' = a(-\dfrac{v}{c^2}x + t') \end{cases} \tag{A.8}$$

が従います．ここで，(A.5)-(A.7) を仮定の (A.4) に代入して整理すれば，

$$a^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) \neq 0$$

となるので，

$$a \neq 0 \quad \text{かつ} \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} \neq 0$$

が成り立ちます．これより，(A.8) の両辺を a で割り，補題 A の前半の主張を適用することによって，

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a(1 - \dfrac{v^2}{c^2})}(x' + vt') \\ t = \dfrac{1}{a(1 - \dfrac{v^2}{c^2})}(\dfrac{v}{c^2}x' + t') \end{cases} \tag{A.9}$$

を得ます．

さて，(A.8) を見れば，あとは a さえ定まればローレンツ変換が求まることになりますね．しかし，このままでは a を定めることはできず，新たに仮定が必要になります．それは，a が v のみに依存する（連続）関数であり，

$$a(0) = 1 \tag{A.10}$$

$$a(v) = a(-v) \tag{A.11}$$

が成り立つという（物理的には自然な）仮定です．これらの仮定を用いて a を定めましょう．まず，(A.8)（で $a = a(v)$ とした式）において S 系と S' 系の役割を入れ換えて議論することにより，

$$\begin{cases} x = a(-v)(x' + vt') \\ t = a(-v)(\dfrac{v}{c^2}x' + t') \end{cases} \tag{A.12}$$

が成り立ちます．なぜなら，O は O' に対して速度 $-v$ で運動しているので，S 系と S' 系を入れ換えて生じる違いは v が $-v$ に変わることだけだからです（特殊相対性原理が効い

ていることに注意してください）．よって，(A.11) から，

$$\begin{cases} x = a(v)(x' + vt') \\ t = a(v)(\dfrac{v}{c^2}x' + t') \end{cases} \tag{A.13}$$

が成り立ちます．上式と，(A.9) の式を見比べれば，

$$a(v) = \frac{1}{a(v)(1 - \dfrac{v^2}{c^2})} \qquad \therefore \quad a(v) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

が得られます．ただし，光速の性質 $v < c$ を用いました（この条件がないと，$a(v)$ が虚数になってしまいます）．これだけでは正符号と負符号のどちらをとっていいのかわかりませんが，仮定 (A.10)（と $a(v)$ の連続性）があることにより，

$$a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

とわかります．[*18]したがって，これを (A.8) に代入すれば，

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma vt \\ t' = -\gamma\dfrac{v}{c^2}x + \gamma t \end{cases}$$

となり，(A.1) が示せました．　　□

ここで，次項の準備のため，(A.1) を x, t について解くことを考えましょう．それは，上記証明中の (A.9) において $a = \gamma$ とすればよく，実際，

$$\begin{cases} x = \gamma x' + \gamma vt' \\ t = \gamma\dfrac{v}{c^2}x' + \gamma t' \end{cases} \tag{A.14}$$

という表示式が得られます（(A.1) において，(x, t) と (x', t') を入れ換え v を $-v$ で置き換えることによっても得られます）．

[*18] 厳密には (A.10) からだけでは，$a(v)$ は v が 0 に近い部分の挙動しか決まりません（例えば，$|v| < 1$ では正符号を取った方の関数であっても，$|v| \geqq 1$ では負符号を取った方の関数になっているかもしれない）．任意の v について $a(v)$ の式を決定するには，$a(v)$ の連続性が必要になります（背理法と中間値の定理で証明できます）．

A.2　ローレンツ変換からの帰結

この項では時間の遅れ，長さの縮み，速度の合成則を証明します．

本文において，「ある系 S から見ると，S に対して動いている系 S' の時計の進み方は遅くなり，その遅れ具合が γ である」という説明をしました．これを数学的に定式化して，証明しましょう．

> **定理 A.2**（時間の遅れ）
> S と S' を定理 A.1 で定義した座標系とする．S 系で時間が t_0 から t_1 まで経過したときに，S' 系の $x' = x'_0$ において時間が t'_0 から t'_1 まで経過したとすると，
> $$t_1 - t_0 = \gamma(t'_1 - t'_0)$$
> が成り立つ．

証明　(A.14) の第 2 式において，x'に x'_0 を代入し，t に t_0 と t_1 をそれぞれ代入すれば

$$t_0 = \gamma\frac{v}{c^2}x'_0 + \gamma t'_0, \quad t_1 = \gamma\frac{v}{c^2}x'_0 + \gamma t'_1$$

が成り立ち，上式の辺々の差をとれば，

$$t_1 - t_0 = \gamma(t'_1 - t'_0)$$

となり，望みの式が従います．　□

ここで，「ある系 S から，S に対して動いている系 S' の時計を見る」ということが，定理中の「x' を x'_0 に固定して，(x, t) を自由に動かす」ということに対応しています．

本文において「ある系 S から見ると，S に対して動いている系 S' における長さが $1/\gamma$ 倍に縮む」ということを説明しましたが，このことも (A.14) の第 1 式を利用すれば同様にして証明できます．

> **定理 A.3**（長さの縮み）
> S と S' を定理 A.1 で定義した座標系とする．S 系で x が x_0 から x_1 まで変化したときに，S' 系の $t' = t'_0$ において x' が x'_0 から x'_1 まで変化したとすると，
> $$x_1 - x_0 = \gamma(x'_1 - x'_0)$$
> が成り立つ．

この付録の最後に，ローレンツ変換を用いて速度の合成則を証明します．速度の合成則とは，「速度 v で動く電車内でボールを速度 w で投げると，地上の人からそのボールの速さはいくつに見えるか？」ということです．通常の力学であれば答えは $v+w$ なのですが，特殊相対性理論では光速度不変の原理があるため，以下の定理で述べられているような修正が必要になります．

定理 A.4（速度の合成則）
S と S' を定理 A.1 で定義した座標系とし，座標系 S'' の原点 O'' は S' の原点 O' に対して相対速度 w で運動しているとする．このとき，O'' の O に対する相対速度は，

$$\frac{v+w}{1+\dfrac{vw}{c^2}} \tag{A.15}$$

である．

証明　まず，S'' 系の原点 O'' を S' 系から見ると，

$$x' = wt'$$

と表すことができます．これを S 系から S' 系へのローレンツ変換の式 (A.1) に代入すれば，

$$\begin{cases} wt' = \gamma x - \gamma vt \\ t' = -\gamma \dfrac{v}{c^2}x + \gamma t \end{cases}$$

が成り立ちます．第 2 式目に w を乗じて第 1 式目と合わせれば，

$$\gamma x - \gamma vt = -\gamma \frac{vw}{c^2}x + \gamma wt$$

となり，両辺を γ で割って x について解くと，

$$x = \frac{v+w}{1+\dfrac{vw}{c^2}}t$$

が得られるので，このことから結論が従います．　□

(A.15) において $w=c$ とすれば，

$$\frac{v+c}{1+v/c} = c$$

となります．すなわち，地上からみると，電車の速度 v がいくつであろうと電車内で発した光の速度 c は c のまま（光速度は不変！）なのです．

付録 B　$E = mc^2$ についての補足

2.7 節において，質量のエネルギーの等価性を表す式

$$E = mc^2 \tag{B.1}$$

を紹介しました．この付録では，(B.1) についてもう少し深い説明をしたいと思います．

B.1　数学からの準備

$E = mc^2$ の話に入る前に，数学からの道具を準備しておきます．ただし，数 III の微積分の知識は仮定します（数 III は未習だけれども概要が知りたいという人は，(B.5) で定義される関数が (B.6) で近似されるということだけ頭に入れて，B.2 節に進んでみてください）．

定理 B（有限マクローリン展開）

0 を含む開区間 I において，f を n 回微分可能な関数とする．このとき，

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x) \tag{B.2}$$

が成り立つ．ただし，$R_n(x)$ はある $c \in (0, x)$ を用いて，

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \tag{B.3}$$

と表される関数である．また，$f^{(n)}$ は f の n 階導関数を表すものとする．

一見記号の乱舞でよくわからないかもしれませんが，例えば，$n = 1$ の場合を考えてみましょう．f が I において 1 回微分可能な関数とすると，f はある $c \in (0, x)$ を用いて，

$$f(x) = f(0) + f'(c)x$$

と書くことができます．この形，どこかで見たことありませんか？これは平均値の定理と一緒ですね．実際，有限マクローリン展開は平均値の定理の拡張といってもよく，その証明には平均値の定理を証明する際に用いたロルの定理を用います．ここで，定理における $R_n(x)$ は**誤差項**などとよばれます．というのも (B.2) は，

$$R_n(x) = f(x) - \left\{ f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \right\}$$

と変形でき，中括弧内は多項式なので，$R_n(x)$ は $f(x)$ を多項式で表したときの「誤差」を表しているからです（$R_n(x)$ は (B.3) を見ると多項式に見えますが，実際は違います．なぜなら，(B.3) における c は x に依存して決まるため，$f^{(n)}(c)$ は x の関数になり，それは一般に多項式とは限らないからです）．

（有限）マクローリン展開は非常な便利な道具で，数学ではもちろん，物理学，工学，経済学などあらゆる分野で用いられています．その理由を簡単に説明しましょう．まず，(B.2) において n をどんどん大きくすると，f が高校で登場するような「ありふれた」微分可能な関数ならば，誤差項 R_n もどんどん小さくなることが証明できます（(B.2) において $n \to \infty$ としたものを，マクローリン展開といいます）．

このことから，

(B.2) は，$\boldsymbol{f}$ が任意の精度で多項式によって近似できることを示している

ことがわかります．多項式というのは最も簡単な関数でもあるので，（高校で登場するような）ほとんどすべての微分可能な関数 f が多項式で近似できるというのは大変ありがたいことですね．

また，(B.2) の右辺の多項式の係数は f の $x=0$ における微分値です．この値は，微分の定義から f の「$x=0$ の周りの情報」のみで決定されます．一方，I を十分広くとっておけば，(B.2) の左辺は十分遠くの x について有効な式になります．これらのことから，

(B.2) は，$\boldsymbol{f}$ の「$\boldsymbol{x=0}$ の周りの情報」がわかれば
$\boldsymbol{f}$ の遠くの情報まで得られることを示している

ことがわかります．[*19]（有限）マクローリン展開の便利さが少しは理解できたでしょうか？ちなみに，定理における 0 を $a \in I$ でおきかえたものを，**有限テイラー展開**といいます．

さて，話が逸れましたが実際に用いるのは $n=2$ のときであるので，その場合の式を以下に書いておきましょう．

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(c)}{2}x^2$$

[*19] 微分はもともと 1 点の周りで定義される局所的概念であるのに，そのような大域的な情報までがわかるのはなぜでしょうか？マクローリン展開の証明にはロルの定理を用いると書きましたが，ロルの定理の証明には最大値の定理が使われています．実は，最大値の定理が局所性を大域性に転回する役割を果たしているのです（さらにいえば，そこにはコンパクトという概念が潜んでいます）．実際，局所的概念である微分と大域的な概念である積分を繋げる微積分学の基本定理の証明にも，最大値の定理が使われています．

上式において，$|x|$ が十分小さい場合を考えてみます．すると，x^2 の値は x に比べて非常に小さくなるので，0 を含む十分小さい区間内の x に対して，

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \tag{B.4}$$

と書くことができます（確認ですが，「≈」は「ほとんど一緒」という意味の記号です）．つまり，f は 1 次関数で書けるのです．いきなりこんなこと言われると驚くかもしれませんが，冷静に考えれば当たり前のことを言っているに過ぎません．というのも，ある（1 回微分可能の）関数によって表されるグラフを原点の周りでどんどん拡大していったら，そのグラフは直線に見えてきますね（「どんどん拡大する」ということが，十分小さい x を考えるということに対応しています）．例えば，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \tag{B.5}$$

という関数を考えてみましょう．すると，

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} \qquad \therefore \quad f'(x) = \frac{1}{2}$$

よって，(B.4) から，$|x|$ が十分小さいとき，

$$f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x \tag{B.6}$$

が成り立ちます．すなわち，(B.5) で定義される関数 f は 1 次関数で近似できるということです．

B.2　$E = mc^2$ の出自

(B.1) を見てまず初めに疑問に思うことは，(B.1) がどのように導出されたかということだと思います．結論から言ってしまうと，(B.1) は特殊相対論における運動エネルギーの定義のようなものです（特殊相対論における運動方程式を定義してエネルギーを「導出」することもできますが，数学的にはどの定義からスタートするかだけの違いです）．しかしそれで終わらせてしまうとあまりに面白くないので，その定義の背景を説明しましょう．以降，座標系 S と S' について，S' の原点 O' は S の原点 O に対して相対速度 v で運動しているとします（付録 A で出てきたものと同じです）．

エネルギーについて述べるためには，まず質量について説明しなければいけません．2.7 節で説明したように，質量は速度によって変化します．ここで，速度はどの座標系（観測者）からみるかによって変化するので，

座標系（観測者）によって質量は異なる

という点に注意して，以下の定義を見てください．

定義 B.1（相対論的質量）

S 系からみた S' 系における質量 $m(v)$ を，ある正定数 m_0 とローレンツ因子 γ を用いて，

$$m(v) = \gamma m_0 \tag{B.7}$$

で定義する．これを**相対論的質量**という．

(B.7) において，$v = 0$ とすると，$\gamma = 1$ より，

$$m(0) = m_0$$

がわかります．このことから，m_0 は**静止質量**とよばれます．この定義も唐突に思われるかもしれませんが，これをきちんと説明すると，やや高度な概念を必要とする[*20]か，かなりの紙幅を使うので，ここでは省略させてください（後者の説明でよいのなら，参考文献の [3] を読んでみましょう）．

さて，相対論的質量を用いて，特殊相対性論における運動エネルギーを定義します．

定義 B.2（相対論的運動エネルギー）

S 系からみた S' 系におけるエネルギー $E(v)$ を，

$$E(v) = m(v)c^2 \tag{B.8}$$

で定義する．これを，**相対論的運動エネルギー**という．

この定義において，特に $E(0)$ を E，静止質量 $m(0)$ を m と書けば，(B.8) は，

$$E = mc^2$$

と書くことができ，これを**静止エネルギー**といいます．つまり，$E = mc^2$ の正体は，相対論的運動エネルギーから導かれる静止エネルギーだったのです．今までの力学において

*20 ローレンツ共変性という条件を満たすように運動量を定義するために，質量は (B.7) のように定義されます．

運動エネルギーは質量と速度の 2 乗の積であったので，「なんとなく」はこの定義でいいような気がしますがそれだけでは納得できない人もいると思うので，B.1 節で説明したマクローリン展開を用いてもう少し理解を深めましょう．

まず，(B.8) に (B.7) を代入すると，γ の定義から，

$$E(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

となります．これは，B.1 節の (B.5) で定義された関数 f を用いることで，

$$E(v) = m_0 c^2 f(\frac{v^2}{c^2})$$

と変形できます．ここで，v が c よりも十分小さいと仮定すると，B.1 節の (B.6) より，

$$E(v) \approx m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

すなわち，観測者の速度が光速に比べて十分小さいとき，

$$E(v) \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \tag{B.9}$$

が成り立ちます．

(B.9) の右辺第 **2** 項は通常の力学の運動エネルギーと一致する

ということに注意すれば，エネルギーを (B.8) のように定義した妥当性がわかると思います．ここで，通常の力学では観測者のスピードは光速より十分小さいと考えられるので，(B.6) を適用する際の仮定は満たされているということに注意してください．まとめれば，

通常の力学におけるエネルギー概念の自然な拡張になるように
相対論的エネルギーを定義した

ということです．

付録 C　回転の表現式の証明

この付録では，回転の表現式，すなわち次の定理を証明します．

<u>定理 **C**</u>（回転）
$\overrightarrow{a} = (x, y)$ を角 θ 回転させたベクトルを $\overrightarrow{a'} = (x', y')$ としたとき，次の関係が成り立つ．

$$\begin{cases} x' = \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y \\ y' = \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y \end{cases} \tag{C.1}$$

証明に入る前に，まず**ベクトルの和**と**ベクトルの実数倍**について説明しておきます．2つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ について，$\overrightarrow{a}$ の始点を O，終点を A とします．また，$\overrightarrow{b}$ を始点 O に重なるように平行移動し，そのときの終点を B とします．このとき，平行四辺形 $OACB$ について，ベクトル $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ と定義します（図 C.1）．式で書けば，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}$$

ということです．

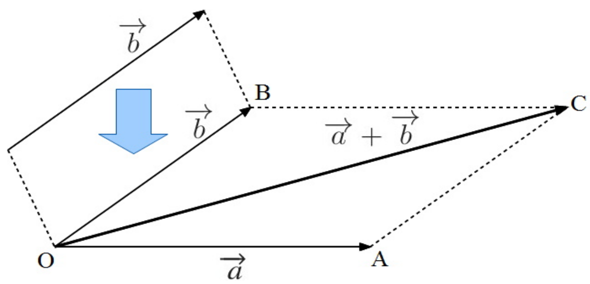


図 C.1

またベクトルの実数倍ですが，これは簡単です．ベクトル $\overrightarrow{a}$ と実数 k に対して，$\overrightarrow{a}$ を k 倍に伸ばしたベクトルを $k\overrightarrow{a}$ と定義します．ただし，k の符号によって，向きが変わることに注意してください（$k = 0$ のときはゼロベクトルといって，大きさ 0 で向きは考えないことにします）．

次に，ベクトル $\overrightarrow{a}$ を角 θ 回転させたベクトルを，$\boldsymbol{R_\theta(\overrightarrow{a})}$ で表すことにします（R は Rotation の頭文字です）．回転を「ベクトルをベクトルに移す作用（写像）」と捉えると，

そのような表し方が自然に思えるのではないでしょうか．さて，R_θ は次のような性質（線形性）を持ちます．

<u>補題</u> **C**（回転の線形性）
回転 R_θ は次の 2 つの性質を持つ．

(1) 2 つのベクトルの和を回転してできたベクトルと，それぞれのベクトルを回転させてできたベクトルの和は等しい（図 C.2）．すなわち，

$$R_\theta(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = R_\theta(\overrightarrow{a}) + R_\theta(\overrightarrow{b}) \tag{C.2}$$

(2) 実数倍したベクトルを回転させてできたベクトルと，回転させてできたベクトルの実数倍は等しい（図 C.3）．すなわち，

$$R_\theta(k\overrightarrow{a}) = kR_\theta(\overrightarrow{a}) \tag{C.3}$$

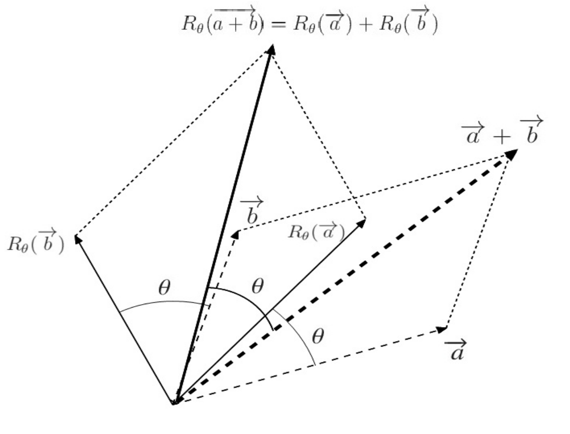


図 C.2

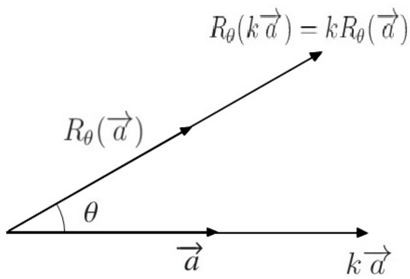


図 C.3

<u>略証</u>　(2) は明らかなので (1) のみ示しますが，そのためには $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ と $R_\theta(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ のなす角が θ であることをいえば十分です．回転は角度を保つので，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ のなす角を ϕ とすれば，$R_\theta(\overrightarrow{a})$ と $R_\theta(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ のなす角も ϕ となります．よって，$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ と $R_\theta(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ のなす角は，

$$(\theta - \phi) + \phi = \theta \qquad \square$$

1 つ補足しておくと，線形性という概念は回転に固有な性質なわけではなく，数学の至るところでお目にかかる性質です，例えば，微分を「関数を関数に移す作用（写像）」と捉

えたとき，微分も線形性を持っています．微分が線形性を持っていることで色々な関数をいかに簡単に微分できるかということを，微分法を習った人ならわかりますね．

さて，補題 C を用いて，定理 C を証明しましょう．まず，

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

なので，

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 0), \qquad \overrightarrow{e_2} = (0, 1) \tag{C.4}$$

とおけば，任意のベクトル $\overrightarrow{a} = (x, y)$ は，

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \tag{C.5}$$

と書くことができ，この表し方はただ 1 つに決まります（このようなとき，(C.4) で定義される $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ を**基底**といいます）．次に，この両辺に R_θ を「作用」させて，(C.5) と定理 C を順次用いれば，

$$\begin{aligned} R_\theta(\overrightarrow{a}) &\overset{(C.5)}{=} R_\theta(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}) \\ &\overset{(C.2)}{=} R_\theta(x\overrightarrow{e_1}) + R_\theta(y\overrightarrow{e_2}) \\ &\overset{(C.3)}{=} xR_\theta(\overrightarrow{e_1}) + yR_\theta(\overrightarrow{e_2}) \end{aligned}$$

，すなわち，

$$R_\theta(\overrightarrow{a}) = xR_\theta(\overrightarrow{e_1}) + yR_\theta(\overrightarrow{e_2}) \tag{C.6}$$

が成り立ちます（等号の上の式番号は，変形の際に用いた式番号を意味しています）．したがって，$R_\theta(\overrightarrow{e_1})$ と $R_\theta(\overrightarrow{e_2})$ が求まれば，$R_\theta(\overrightarrow{a})$（すなわち，回転したベクトルの座標表示）が求まることになります．[*21]まず，本文の円関数の定義 (4.1) によって，

$$R_\theta(\overrightarrow{e_1}) = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{C.7}$$

が求まります．次に，$R_\theta(\overrightarrow{e_1})$ の終点を A, 点 A から x 軸に下ろした垂線の足を P, $R_\theta(\overrightarrow{e_2})$ の終点を B，点 B から y 軸に下ろした垂線の足を Q とすれば（図 C.4），

$$\triangle OAP \equiv \triangle OBQ \tag{C.8}$$

となります（2 つの直角三角形において，それぞれの斜辺と他の一角が等しいからです）．

[*21] このような工夫は非常にトリッキーに思えるかもしれませんが，実は本質的な変形です．実際，線形写像（線形性を持つ写像）は基底の像さえわかれば一意に決まってしまうという著しい性質を持っています．

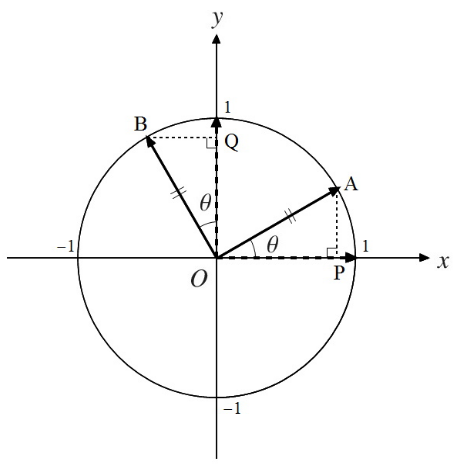


図 C.4

よって，

$$OP = OQ, \qquad PA = QB$$

となるので，(C.7) より，

$$OQ = \cos\theta, \qquad QB = \sin\theta$$

が成り立ちます．したがって，符号も考慮すれば，点 B の座標は $(-\sin\theta, \cos\theta)$ となることから，

$$R_\theta(\overrightarrow{e_2}) = (-\sin\theta, \cos\theta) \tag{C.9}$$

がわかります．以上より，(C.6) に (C.7) と (C.9) を代入することによって，

$$R_\theta(\overrightarrow{a}) = x(\cos\theta, \sin\theta) + y(-\sin\theta, \cos\theta) = (\cos\theta\cdot x - \sin\theta\cdot y, \sin\theta\cdot x + \cos\theta\cdot y)$$

が得られます．$R_\theta(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a'} = (x', y')$ であったことを思い出せば，結局，

$$\begin{cases} x' = \cos\theta\cdot x - \sin\theta\cdot y \\ y' = \sin\theta\cdot x + \cos\theta\cdot y \end{cases}$$

が成り立ち，定理 C.1 が証明されました．

付録 D　内積と幾何構造

この付録では，ベクトルに対して定義される内積と，内積が生み出す幾何構造について解説します．一言で書けば，

内積とは長さや角といった幾何学概念の母胎となる概念

です．すなわち，内積について考察することにより，私たちは「幾何学」をより高い立場から考えられるようになるのです．まず慣れ親しんでいるユークリッド空間において内積を説明した後に，ミンコフスキー空間，さらには一般の内積空間へと話を進めていきたいと思います．

D.1　ユークリッド空間の幾何構造

この項では，ユークリッド空間における内積を定義して，内積から長さや角が定義されるという流れを見ていきます．

少々天下り的ですが，まずユークリッド内積を定義してしまいましょう．

定義 D.1（ユークリッド内積）

2 次元ベクトル $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1), \overrightarrow{b} = (x_2, y_2)$ に対して，

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{D.1}$$

で定義される $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を，**ユークリッド内積**という．

「2 次元ベクトル」と書きましたが，n 次元ベクトルになったとしても同様に内積は定義されます．ただし，いたずらに煩雑さを増やすのは避けたいので，以後 2 次元ベクトルを扱うことにします．また 1 つ注意として，高校の教科書において内積は

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta \quad \text{（ただし，}\theta\text{ は }\overrightarrow{a}\text{ と }\overrightarrow{b}\text{ のなす角）} \tag{D.2}$$

で定義されている場合が多く，実際その定義の方が内積の意味を掴みやすいです（たとえば，海城学園ホームページの「海城生に聞きました　～数学，ここがわからない～ (4)」を見てみてください）．ただし，後者の定義の場合，角 θ とは何かということをわかっていることが前提になっています．ユークリッド空間で議論するのであれば角度はほぼ自明

にわかっているものなのでその定義でよいのですが，私たちの目標はミンコフスキー空間の構造を知ることであり，ミンコフスキー空間における角度がどんなものであるかということは現時点では想像もつきません．よって，この先ミンコフスキー空間を考える素地としてユークリッド空間を考えていることを考慮すると，角度を用いて内積を定義することは避けたいのです．

話が逸れましたが，ユークリッド内積は次の性質を持ちます．

定理 D.1（ユークリッド内積の性質）

ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ と，実数 α について，以下のことが成り立つ．

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} \tag{D.3}$$

$$(\alpha \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \alpha(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) \tag{D.4}$$

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} \tag{D.5}$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \geqq 0 \tag{D.6}$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \tag{D.7}$$

ただし，命題 P，Q に対して，「$P \Leftrightarrow Q$」は，「$P \Rightarrow Q$ かつ $Q \Rightarrow P$」を意味しています．これらの性質は内積の定義 (D.1) からほぼ直接的に従うので，その証明は各自の練習問題としておきましょう．また，(D.3)-(D.5) を用いることで，ベクトルの内積の計算は数の計算と同じようにできます．例を挙げると，任意の実数 α，β に対して，

$$\begin{aligned}
(\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}) \cdot (\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}) &\overset{\text{(D.5)}}{=} (\alpha \overrightarrow{a}) \cdot (\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}) + (\beta \overrightarrow{b}) \cdot (\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}) \\
&\overset{\text{(D.5)}}{=} (\alpha \overrightarrow{a}) \cdot (\alpha \overrightarrow{a}) + (\alpha \overrightarrow{a}) \cdot (\beta \overrightarrow{b}) \\
&\qquad + (\beta \overrightarrow{b}) \cdot (\alpha \overrightarrow{a}) + (\beta \overrightarrow{b}) \cdot (\beta \overrightarrow{b}) \\
&\overset{\text{(D.4)}}{=} \alpha^2(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}) + \alpha\beta(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + \alpha\beta(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}) + \beta^2(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}) \\
&\overset{\text{(D.3)}}{=} \alpha^2(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}) + 2\alpha\beta(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + \beta^2(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b})
\end{aligned}$$

すなわち，

$$(\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}) \cdot (\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}) = \alpha^2(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}) + 2\alpha\beta(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + \beta^2(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}) \tag{D.8}$$

が成り立ちます．これは，数の計算において，

$$(\alpha a + \beta b)^2 = \alpha^2 a^2 + 2\alpha\beta ab + \beta^2 b^2 \tag{D.9}$$

が成り立つことと対応しています．

本文第 3 節に関連して，次のことが成りたつことを注意しておきます（証明は直接的な計算のみなので，省略）．

定理 D.2　ユークリッド内積の値は回転によって不変である．すなわち，

$$R_\theta(\overrightarrow{a}) \cdot R_\theta(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$$

が成り立つ．

さて，冒頭で述べた通り，内積を用いることでユークリッド空間における長さと角度を「定義」することができます．「長さや角度なんて改めて定義されなくても知っている」と思う人もいるかもしれませんが，実際に定義を聞かれたらきちんと答えられますか？その問いに対する 1 つの解答をこれから与えていくことにしましょう．

まず，ユークリッド空間における長さをユークリッドノルムといいますが，それを定義します（「ユークリッド空間における長さ」という表現をしましたが，本文第 1 節で書いたように，考える空間が変われば長さも変わることに注意してください）．

定義 D.2（ユークリッドノルム）

$\overrightarrow{a}$ に対して，

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}} \tag{D.10}$$

で定義される $|\overrightarrow{a}|$ を，**ユークリッドノルム**という．

ここで，(D.6) より $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \geqq 0$ なので，(D.10) の右辺がきちんと定義されることに注意しましょう．また，(D.1) から

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{D.11}$$

となるので，平面幾何においてピタゴラスの定理を用いた長さと一致していますね．(D.10) をみると，

ユークリッドノルムはユークリッド内積によって決まる値である

ということがわかります．さて，ユークリッドノルムは以下の性質を持ちます．

定理 D.3（ユークリッドノルムの性質）
$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，実数 α について，以下のことが成り立つ．

$$|\overrightarrow{a}| \geqq 0 \tag{D.12}$$

$$|\overrightarrow{a}| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \tag{D.13}$$

$$|\alpha\overrightarrow{a}| = |\alpha||\overrightarrow{a}| \tag{D.14}$$

$$|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \leqq |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| \tag{D.15}$$

(D.12)-(D.14) の性質は (D.11) からほぼ明らかですが，ユークリッド内積の性質（定理 D.1）のみを用いて証明してみましょう．まず，(D.12) は平方根の定義から明らかです．(D.13) は，(D.7) から直ちに従います．また (D.14) は，(D.4) から，

$$|\alpha\overrightarrow{a}| \overset{(D.10)}{=} \sqrt{(\alpha\overrightarrow{a})\cdot(\alpha\overrightarrow{a})} \overset{(D.4)}{=} \sqrt{\alpha^2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a})} = |\alpha|\sqrt{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}} \overset{(D.10)}{=} |\alpha||\overrightarrow{a}|$$

となり，確かに成り立ちます．(D.15)（三角不等式）の証明も (D.11) を用いて直接計算すればそれほど難しくないですが，後でユークリッド内積の性質のみを用いた証明方法を紹介します．また，ノルムを用いることで，(D.8) は，

$$|\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}|^2 = \alpha^2|\overrightarrow{a}|^2 + 2\alpha\beta(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}) + \beta^2|\overrightarrow{b}|^2) \tag{D.16}$$

という形に書き換えることができます（より数の計算 (D.9) に近づきましたね）．

次に，零ベクトルでない $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角は

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$

を満たす実数 θ として定義されます．ここで鋭い人は，

果たしてそのような $\boldsymbol{\theta}$ が本当に存在するのか？

という疑問が浮かぶことでしょう．実際，右辺の値の絶対値が 1 より大きくなったとしたら，$\cos\theta$ の定義からそのような θ は存在しません．そのようなことが起きないことを保証するのが，次に述べる（コーシー・）シュワルツの不等式です．

定理 D.4（シュワルツの不等式）
$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ について，以下の不等式が成り立つ．

$$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}| \leqq |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \tag{D.17}$$

<u>証明</u>　直接的な計算でも証明は容易ですが，ここではユークリッド内積の性質のみを用いて証明してみましょう（ユークリッドノルムの性質も用いますが，それらはすべてユークリッド内積の性質のみを用いて示されていたことに注意してください）．望みの不等式の両辺の値は正なので，

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 \leqq |\overrightarrow{a}|^2 |\overrightarrow{b}|^2$$

を証明すれば十分です．$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ の時は両辺共に 0 で等号が成立するので，以降は $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ の時を考えることにします．任意の実数 t に対して，(D.16) において $\alpha = t$，$\beta = 1$ としてみると，

$$|t\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 = t^2|\overrightarrow{a}|^2 + 2t(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + |\overrightarrow{b}|^2 \tag{D.18}$$

が成り立ちます．ここで，$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ なので，(D.13)（の対偶）より，$|\overrightarrow{a}| \neq 0$ です．このことから，t が任意の実数であったことに注意して，

$$t = -\frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2}$$

とすれば，(D.18) の右辺は以下のように変形できます：

$$\begin{aligned} t^2|\overrightarrow{a}|^2 + 2t(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + |\overrightarrow{b}|^2 &= \frac{(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2} - 2\frac{(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2} + |\overrightarrow{b}|^2 \\ &= \frac{-(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 + |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2}{|\overrightarrow{a}|^2} \end{aligned}$$

よって，(D.18) より，

$$|t\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 = \frac{-(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 + |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2}{|\overrightarrow{a}|^2}$$

この式の左辺は正なので，

$$0 \leqq \frac{-(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 + |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2}{|\overrightarrow{a}|^2}$$

すなわち，

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 \leqq |\overrightarrow{a}|^2 |\overrightarrow{b}|^2$$

これより，望みの不等式が従います．　□

少々トリッキーな証明でしたね．ちなみに，(D.18) より，任意の実数 t に対して

$$t^2|\overrightarrow{a}|^2 + 2t(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + |\overrightarrow{b}|^2 \geqq 0$$

が成り立ちますが，2 次関数の知識がある人にとっては，上式において (判別式) $\leqq 0$ の条件を使った方が見通しがよい証明になったかもしれません（各自確かめてみましょう）.

さて，シュワルツの不等式 (D.17) において $|\overrightarrow{a}|, |\overrightarrow{b}| \neq 0$（すなわち，$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$）のとき，絶対値を外して両辺を $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ で割れば，

$$-1 \leqq \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} \leqq 1$$

が成り立ちます．したがって，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であることと，$\cos\theta$ の値が「連続的に」動くことから，

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} \tag{D.19}$$

を満たす実数 θ が必ず存在します（微分法で習う中間値の定理を用いれば厳密に証明できます）．よって，次の定義が意味を持ちます．

定義 D.3（ユークリッド空間における角）

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ に対して，(D.19) を満たす θ を，$\boldsymbol{\overrightarrow{a}}$ **と** $\boldsymbol{\overrightarrow{b}}$ **のなす角**という．

(D.19) において両辺に $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ を掛け合えばよく知られた内積の定義式 (D.2) が導かれますね．また，ユークリッドノルムがユークリッド内積から決まることに注意すると，

角はユークリッド内積によって決まる値である

ことがわかります．[*22]

これより，本文では証明できなかったですが，定理 D.2 から，

角は回転によって不変である

こともわかります．

ここで，「$\sin\theta$ も $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ を満たす連続関数なのだから，$\sin\theta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} \quad \cdots (*)$ を満たす θ を角として定義してもいいのではないか？」という疑問が浮かぶかもしれませ

[*22] 逆三角関数を用いれば，

$$\theta = \arccos \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$

と，θ の表示が具体的に求まります．

ん．論理的にはまったく正しいのですが，$(*)$ のように $\sin\theta$ を角の定義に用いてしまうと，それは私たちがよく知っている角とは別の性質を持つものになってしまいます．例えば，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ のとき，$(*)$ から $\sin\theta = 1$ であり，この式を満たす θ は 90° です（ただし，θ は $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ に制限しました）．しかし，私たちの親しんでいる角で考えれば，同じベクトルのなす角は 0° になってるはずです．このような理由で，角の定義には $\sin\theta$ は使われないのです．一方，$\cos\theta = 1$ となる θ を考えれば，それは 0° ですね．この他にも，角の定義に $\cos\theta$ を用いると私たちがよく知っている角の性質がきちんと保たれていることがわかります．

シュワルツの不等式の応用として，三角不等式 (D.15) を証明してみましょう．証明は簡単で，(D.16)（において $\alpha = \beta = 1$ としたもの）とシュワルツの不等式 (D.17) より，

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 &\overset{(D.16)}{=} |\overrightarrow{a}|^2 + 2(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + |\overrightarrow{b}|^2 \\
&\overset{(D.17)}{\leqq} |\overrightarrow{a}|^2 + 2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{b}|^2 \\
&= (|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|)^2
\end{aligned}
$$

となるので，これより，三角不等式

$$
|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \leqq |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|
$$

が成り立ちます．したがって，

ユークリッドノルムの性質（定理 **D.3**）は
ユークリッド内積の性質（定理 **D.1**）のみを用いて証明される

ということがわかりました．

最後に，ベクトルの直交について定義しておきます．

定義 D.4（ベクトルの直交）

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ に対して，

$$
\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \tag{D.20}
$$

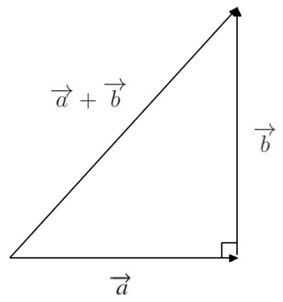
が成り立つとき，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が**直交する**という

ここで，「直交」という幾何学的ば概念が内積のみを用いて定義されていることに注意してください．この定義から，直ちに次のピタゴラスの定理が従います．

定理 D.5（ピタゴラスの定理）
$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が直交するとき，

$$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2$$

が成り立つ．



証明　(D.16) において，$\alpha=\beta=1$ とすれば，

$$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+|\overrightarrow{b}|^2$$

が成り立ちます．仮定から，(D.20) が成り立つのでこれを上式に代入すれば，望みの式が得られます．　□

本文においてベクトルの長さを定義するためにピタゴラスの定理を用いましたが，ここではまず内積を定義した後に，その性質のみを用いてピタゴラスの定理を証明しました．いま，

幾何学において最重要定理であるピタゴラスの定理の証明において
私たちが普通考えるような幾何的概念が一切現れてこなかった

という点に注目してください．

D.2　ミンコフスキー空間の幾何構造

この項では，前項のユークリッド空間における考察をベースにして，ミンコフスキー空間の幾何構造を明らかにします．ミンコフスキー空間では不思議なことに，

三角不等式 (D.15) の不等号が逆向きになった不等式（逆三角不等式）が成り立つ

のですが，そのことを証明することがこの項の最終目標です．

まず，ミンコフスキー空間における内積にあたるものを定義しましょう．以降，ミンコフスキー空間におけるベクトルを時空ベクトルと呼ぶことにします（空間に関して 2 次元，時間に関して 1 次元を考えるので，時空ベクトルは 3 次元ベクトルになります）．

定義 D.5（ミンコフスキー内積）

時空ベクトル $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1, t_1), \overrightarrow{b} = (x_2, y_2, t_2)$ に対して，

$$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2 - t_1t_2 \tag{D.21}$$

で定義される $\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}$ を，**ミンコフスキー内積**という．

ここで，(D.21) は実は内積とは異なるものなのですが，慣例上「ミンコフスキー内積」と呼ばれることを注意しておきます（詳しいことは D.3 節で述べます）．また，直接的な計算で次のことがわかります．

定理 D.6　ミンコフスキー内積の値はローレンツ変換によって不変である．すなわち，(A.1) で定義されるローレンツ変換を L_v と書くことにすれば，

$$L_v(\overrightarrow{a}) * L_v(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}$$

が成り立つ．

次にミンコフスキー内積の性質を述べましょう．

定理 D.7（ミンコフスキー内積の性質）
時空ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ と，実数 α について，以下のことが成り立つ．

$$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} * \overrightarrow{a} \tag{D.22}$$

$$(\alpha\overrightarrow{a}) * \overrightarrow{b} = \alpha(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}) \tag{D.23}$$

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) * \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} * \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} * \overrightarrow{c} \tag{D.24}$$

証明はユークリッド内積の性質の証明と同様に省きます．ここで，

$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a} \geqq 0$ が常に成り立つとは限らない

ということを注意しておきます．このことを考慮すると，時空ベクトルを以下の 3 種類に分類するのはごく自然な発想といえるでしょう．

定義 D.6（時空ベクトルの分類）

i) $\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a} < 0$ を満たす時空ベクトル $\overrightarrow{a}$ を，**時間的ベクトル**という．
ii) $\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a} > 0$ を満たす時空ベクトル $\overrightarrow{a}$ を，**空間的ベクトル**という．
iii) $\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a} = 0$ を満たす時空ベクトル $\overrightarrow{a}$ を，**光的ベクトル**という．

ここで，(D.6) よりユークリッド空間では常に $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \geqq 0$ が成り立っていたことを思い出せば，時間的ベクトルはミンコフスキー空間を考えてはじめて登場した概念です．言いかえれば，時間的ベクトルは私たちにとって特異な存在であるのですが，

数学において特異なものに目を向けるとその本質が見えてくること

が実は多いのです．[*23]例に漏れず，

時間的ベクトルに目を向けるとミンコフスキー空間の本質が見えてくる

ことが以下でわかると思います．

さて，これらの定義の下で，後にミンコフスキー空間におけるシュワルツの不等式（逆シュワルツの不等式）を証明するために用いる補題を準備しておきます．ただし，定理中の「直交」とは，ミンコフスキー内積がゼロになるという意味で用いています．

補題 D　時間的ベクトル $\overrightarrow{a}$ に対して，$\overrightarrow{a}$ と直交するゼロでない時空ベクトルは，すべて空間的ベクトルである．

証明　$\overrightarrow{a} = (x_1, y_1, t_1)$ と直交するゼロでない時空ベクトルを $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2, t_2)$ とおき，$\overrightarrow{b}$ が空間的ベクトルになることを示します．ここで，$t_2 = 0$ のときは，

$$\overrightarrow{b} * \overrightarrow{b} = x_2^2 + y_2^2$$

となるので，$\overrightarrow{b}$ がゼロベクトルでない（すなわち，x_2 か y_2 はゼロでない）ことから，

$$\overrightarrow{b} * \overrightarrow{b} > 0$$

となり，$\overrightarrow{b}$ が空間的ベクトルであることが従います．よって，以降では $\underline{t_2 \neq 0}$ を仮定します．まず，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が直交するので，$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = 0$ より，

$$x_1x_2 + y_1y_2 - t_1t_2 = 0$$

[*23] この言葉の意味は，将来複素関数論で特異点を学ぶとよく理解できると思います．

すなわち，

$$x_1x_2 + y_1y_2 = t_1t_2 \tag{D.25}$$

が成り立ちます．ここで，

$$\overrightarrow{x} = (x_1, x_2), \quad \overrightarrow{y} = (y_1, y_2)$$

というユークリッド空間におけるベクトルを考えます．すると，$\underline{\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}}$ であることがわかります．なぜなら，$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$（すなわち，$x_1 = y_1 = 0$）と仮定すると，(D.25) より $t_1t_2 = 0$ なので，$t_2 \neq 0$ から $t_1 = 0$ となります．よって，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ となり，$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a} = 0$ が成り立つので，$\overrightarrow{a}$ が時間的ベクトルであることに矛盾します．さて，ユークリッド内積の定義 (D.1) より，(D.25) は，

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = t_1t_2$$

と書き換えることができ，特に，

$$t_1^2t_2^2 = |\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}|^2 \tag{D.26}$$

が成り立ちます．さて，$\overrightarrow{a}$ が時間的ベクトルという仮定より，$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a} < 0$ なので，

$$x_1^2 + y_1^2 - t_1^2 < 0$$

ですが，ユークリッドノルムの定義 (D.10) から $|\overrightarrow{x}|^2 = x_1^2 + y_1^2$ となることに注意すれば，

$$|\overrightarrow{x}|^2 < t_1^2$$

と書けます．$t_2 \neq 0$ よりこの不等式の両辺に t_2^2 を乗じて，(D.26) を用いると，

$$t_2^2|\overrightarrow{x}|^2 < |\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}|^2 \tag{D.27}$$

が成り立ちます．一方，$\overrightarrow{x}$ と $\overrightarrow{y}$ はユークリッド空間のベクトルなので，ユークリッド空間におけるシュワルツの不等式 (D.17) より，

$$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}|^2 \leqq |\overrightarrow{x}|^2|\overrightarrow{y}|^2$$

となります．したがって，(D.27) より，

$$t_2^2|\overrightarrow{x}|^2 < |\overrightarrow{x}|^2|\overrightarrow{y}|^2$$

となります．よって $|\overrightarrow{x}|^2 > 0$ であったことに注意すれば，上式から

$$|\overrightarrow{y}|^2 - t_2^2 > 0$$

が従いますが，これは，$\overrightarrow{y}$ の定義から，

$$x_2^2 + y_2^2 - t_2^2 > 0$$

すなわち，

$$\overrightarrow{b} * \overrightarrow{b} > 0$$

を意味します．したがって，$\overrightarrow{b}$ は空間的ベクトルであることが示せました． □

さて，ユークリッド空間の時と同様に，ミンコフスキー内積を用いてミンコフスキー空間における長さ，すなわちミンコフスキーノルムを定義しましょう（ミンコフスキー内積のところでも注意しましたが，次に述べる (D.28) も実はノルムと書いてしまうとウソになってしまうのですが，慣例的にミンコフスキーノルムとよびます）．

定義 D.7（ミンコフスキーノルム）

時空ベクトル $\overrightarrow{a}$ に対して，

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{|\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a}|} \tag{D.28}$$

で定義される $\|\overrightarrow{a}\|$ を，**ミンコフスキーノルム**という．

ここで，$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a}$ は負になる場合もあるため，ルートの中に絶対値が入っていることに注意してください．特に，$\overrightarrow{a}$ が時間的ベクトルのとき $\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a} < 0$ より，$|\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a}| = -\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a}$ であるため，(D.28) の両辺を 2 乗することにより，

$$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a} = -\|\overrightarrow{a}\|^2 \tag{D.29}$$

が成り立ちます．

先ほど示した補題 D を用いて，ミンコフスキー空間におけるシュワルツの不等式を証明しましょう．

定理 D.8（逆シュワルツの不等式）$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が時間的ベクトルならば，

$$|\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}| \geqq \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \tag{D.30}$$

証明　望みの不等式は両辺が正なので，

$$(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b})^2 \geqq \|\overrightarrow{a}\|^2\|\overrightarrow{b}\|^2$$

を示せば十分です．また，$\|\overrightarrow{a}\| = 0$ のとき明らかに (D.30) は成り立つので，以下では $\|\overrightarrow{a}\| \neq 0$ を仮定します．さて，$\overrightarrow{a}$ が時間的ベクトルであることに注意して命題 D.7（ミンコフスキー内積の性質）と (D.29) を用いれば，任意の実数 t について，

$$(t\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) * \overrightarrow{a} = t(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{b} * \overrightarrow{a} = -t\|\overrightarrow{a}\|^2 + \overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}$$

が成り立ちます．$\|\overrightarrow{a}\| \neq 0$ より，上式において，

$$t = \frac{\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|^2} \tag{D.31}$$

とすれば，

$$(t\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) * \overrightarrow{a} = 0$$

となります．これは時空ベクトル $t\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ が時間的ベクトル $\overrightarrow{a}$ と直交していることを示しているので，補題 D より，$t\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ はゼロベクトルか空間的ベクトルになります．よって，

$$(t\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) * (t\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \geqq 0 \tag{D.32}$$

が従います．ここで，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は時間的ベクトルなので，定理 D.7（ミンコフスキー内積の性質），(D.29)，(D.31) より，

$$\begin{aligned}(t\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) * (t\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) &\overset{\text{定理} D.7}{=} t^2(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{a}) + 2t(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{b} * \overrightarrow{b} \\ &\overset{(D.29)}{=} -t^2\|\overrightarrow{a}\|^2 + 2t(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}) - \|\overrightarrow{b}\|^2 \\ &\overset{(D.31)}{=} \frac{(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b})^2 - \|\overrightarrow{a}\|^2\|\overrightarrow{b}\|^2}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\end{aligned}$$

したがって，(D.32) から，

$$(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b})^2 \geqq \|\overrightarrow{a}\|^2\|\overrightarrow{b}\|^2$$

となるので，これより結論が従います．　□

逆三角不等式の証明に入る前に，ミンコフスキー空間における角を定義しておきましょう．そのために，1 つだけ用語を定義しておきます．

定義 A.8（順時的ベクトル）

時間的ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が，

$$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} < 0$$

を満たすとき，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は順時的ベクトルであるという．

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が順時的ベクトルのとき，定義から，

$$|\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}| = -(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b})$$

なので，逆シュワルツの不等式 (D.30) から，

$$-(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}) \geqq \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|$$

すなわち

$$1 \leqq \frac{-(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b})}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|}$$

が成り立ちます．ユークリッド空間の場合は $\cos\theta$ を用いて角を定義しましたが，上式よりそれは不可能です．ではどうするかというと，ミンコフスキー空間に密接に関わり，かつ $\cos\theta$ に似ている関数があったことは思い出してください．それは双曲線関数 $\cosh\theta$ です．実際，本文の図 4.3（p.37）より，$\cosh\theta$ は連続関数であり，$1 \leqq \cosh\theta$ をみたすので，

$$\cosh\theta = \frac{-(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b})}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|} \tag{D.33}$$

を満たす $\theta > 0$ が存在します（$\cosh\theta$ が $t > 0$ で単調増加であることに注意すれば，θ がただ 1 つに定まることもいえます）．よって，次の定義が意味を持ちます．

定義 D.9（双曲角）

順時的ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ に対して，(D.33) で定義される θ を，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす**双曲角**という．

ミンコフスキーノルムがミンコフスキー内積で表現できることと定理 D.6 に注意すれば，

双曲角はローレンツ変換によって不変である

ことが結論づけられます．本文で見たように，このあたりはユークリッド空間とパラレルになっていますね．

では，ミンコフスキー空間における三角不等式を証明しましょう．

定理 D.9（逆三角不等式）

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が順時的ベクトルならば，

$$\|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\| \leq \|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|$$

<u>証明</u>　まず，$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が順時的ベクトルであるという仮定から，

$$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} < 0, \quad \overrightarrow{a} * \overrightarrow{a} < 0, \quad \overrightarrow{b} * \overrightarrow{b} < 0$$

が成り立ちます（順時的ベクトルは，定義より時間的ベクトルでもあることに注意してください）．よって，

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) * (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} * \overrightarrow{a} + 2(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{b} * \overrightarrow{b} < 0$$

なので，$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ は時間的ベクトルです．これより，(D.29) に注意して，上式の左辺と右辺を変形すれば，

$$-\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2 = -\|\overrightarrow{a}\|^2 + 2(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}) - \|\overrightarrow{b}\|^2 \tag{D.34}$$

が成り立ちます．ここで，$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が順時的ベクトル（すなわち時間的ベクトル）であるので，逆シュワルツの不等式 (D.30) より，

$$-(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}) \geqq \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \qquad \therefore \quad \overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} \leqq -\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|$$

が従います．この式と (D.34) より，

$$-\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2 \leqq -\|\overrightarrow{a}\|^2 - 2\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| - \|\overrightarrow{b}\|^2 = -(\|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|)^2$$

すなわち，

$$(\|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|)^2 \leqq \|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2$$

が成り立つので，これより望みの不等式が得られます．　□

これにて，逆三角不等式を証明するという本項の目的を果たすことができました，最後にコメントをしておくと，逆三角不等式の成立が示すように，ミンコフスキー空間の幾何学はユークリッド空間の幾何学とは根本的に異なっています．それは私たちには一見非常識な幾何学（非ユークリッド幾何学！）に思えてしまうことでしょう．このことは，特殊相対性理論の諸結果が私たちには非常識に思えてしまうという事実に反映されています．つまり，

特殊相対性理論における不可思議な結果の数々は，
その舞台であるミンコフスキー空間の非ユークリッド性が反映されたものである

と考えることもできるのです．

D.3　内積が生み出す構造

この項では，今まで述べてきた内積について一般化することを試みます．内容がかなり抽象的になるため，流れを追うだけでも結構です．

まず内積を与える空間を定義します．以降，$\mathbb{R}$ で実数全体の集合を表すものとします．

定義 D.10（ベクトル空間）

集合 V が $\mathbb{R}$ 上[*24]の**ベクトル空間（線形空間）**であるとは，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して和とよばれる演算 $+$ があって $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ が決まり，$\alpha \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{x} \in V$ に対してスカラー倍とよばれる演算があって $\alpha \boldsymbol{x} \in V$ が決まり，これらが次の演算規則をみたすときである．

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
(2) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$
(3) すべての $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ を成り立たせるような $\boldsymbol{0} \in V$ がただ 1 つ存在する．
(4) すべての $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ を成り立たせるようなベクトル $\boldsymbol{x}'$ がただ 1 つ存在する
(5) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
(6) $\alpha(\beta \boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$
(7) $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$
(8) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$

なお，V の元を**ベクトル**という．

当たり前なことを書き連ねただけに見えますが，これは私たちが今まで使ってきた「矢印としてのベクトル」を抽象化した結果です．そこでは，

ベクトルから「矢印」というイメージが捨象されてしまっている

ことに注意しましょう．「逆にわかりにくくなっただけじゃないか！」と思う人もいるかもしれませんが，定義を抽象化することによって，本来ベクトルとは思えないものも，ベ

[*24] $\mathbb{R}$ の部分は複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ にしても大丈夫で，さらに一般の体 $\mathbb{K}$ にまで拡張できます．

クトルの仲間に入れてあげることができます．次の定理を見てみてください．

定理 D.10　閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数全体の集合を $C([a,b])$ と書き，$f,g \in C([a,b])$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対してその和とスカラー倍を，各点 $x \in [a,b]$ ごとに，

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

と定義すると，$C([a,b])$ はベクトル空間になる．

連続関数の和とスカラー倍が連続関数になることに注意すれば，和とスカラー倍がきちんと定義されることがわかります（ちなみに，「C」は連続を意味する Continuous の C です）．残りの条件を満たすかどうかの証明は皆さんに委ねますが，1 つ強調したいのは，

関数をベクトルとみなすことができる

という点です．このことは，「ベクトル＝矢印」という既成概念の下では，決して生まれなかったことでしょう．ここに，ベクトルを抽象化した意義があります．

準備ができたので，いよいよお待ちかねの内積を定義しましょう．

定義 D.11（内積）

ベクトル空間 V の 2 つの元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，実数 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が対応し，次の性質を満たすとき，V に内積が与えられたといい，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**内積**という．

(1) 対称性
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

(2) 双線形性
$$(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

(3) 正値性[*25]
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$$

(4) 非退化性[*26]
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

なお，内積が与えられたベクトル空間を**内積空間**といい，$(V, (\cdot,\cdot))$ と表記する．

[*26] 内積の定義に正値性を含めない流儀もありますが，解析学においてはこれが一般的な定義です．
[*26] 非退化性の定義として，「任意の $\boldsymbol{y}$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$」を採用する場合もあります．

内積の記号に「$\cdot$」が使われていないことに注意してください．こちらの方が内積の一般的な表記であり，実際大学で使用するほとんどの教科書にはこちらの記号が使われています（将来的に解析学で内積を用いるようになると，この記法の便利さが身に染みてわかると思います）．また，この定義からわかるように D.2 節で定義したミンコフスキー内積は内積にはなりません．なぜなら，ミンコフスキー内積は正値性を満たさないからです．[*27]

さて，この定義を見たとき何か気付いた人はいないでしょうか？これは，D.1 節で登場した定理 D.1（ユークリッド内積の性質）と内容が同じですね．D.1 節では，まず（ユークリッド）内積を具体的に定義して，その性質を導きました．しかし，既に完成した理論体系においては，上記の性質を満たすもの（写像）を内積とよぶのです（抽象化したことの御利益はこの項の後半で明らかになるでしょう）．したがって，D.1 節で定義したユークリッド内積は，内積自身の定義ではありません．「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$（という写像）を (D.1) のように定義すると，それは内積になっている」と書くのが正しいです．きちんと書けば，次の命題が成り立ちます．

定理 D.11　n 個の実数の組 $\mathbb{R}^n$ は通常の和とスカラー倍に対してベクトル空間となり，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して，

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_{\mathbb{R}^n}=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k(=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n) \tag{D.35}$$

とすれば，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_{\mathbb{R}^n}$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に内積を与える．

内積に添え字が付いていることに注意してください（これはこの後にも述べるように，色々な種類の内積が存在することに起因しています）．この定理から，ユークリッド空間を厳密に定義することができます．

定義 D.12（n 次元ユークリッド空間）

$\mathbb{R}^n$ に (D.35) で定義される内積を与えた内積空間 $(\mathbb{R}^n,(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n})$ を **$\boldsymbol{n}$ 次元ユークリッド空間**といい，その内積を**ユークリッド内積**という．

(D.35) が内積の 4 つの性質をみたすことは各自確かめておきましょう．ここで，好奇心の強い人は，

[*27] ただし，前脚注における意味で非退化性を定義すれば，ミンコフスキー内積は正値性以外の内積の条件をみたします．そこで，ミンコフスキー内積を**不定内積**とよぶことがあります．

定理 **D.10** で定義されるような，関数全体の空間にも
内積を与えることができるのではないか？

ということを考えたのではないでしょうか．その予想は正しく，関数同士の内積が以下のように定義できます．

定理 D.12　$f, g \in C([a,b])$ に対して，

$$(f,g)_{L^2} = \int_a^b f(x)g(x)\ dx \tag{D.36}$$

とすれば，$(f,g)_{L^2}$ は $C([a,b])$ に内積を与える．この内積を $\boldsymbol{L^2}$ **内積**という．[*28]

連続関数の積は連続関数であり連続関数は $[a,b]$ で積分可能なので，(D.36) の右辺はきちんと定義されていることに注意してください．さて，(D.36) が内積の性質をみたすことを確かめないといけないのですが，非退化性を示すことが高校生にとっては少し難しいです（連続性を ϵ-δ 式に定義しないといけない）．ただし，「大学のどんな微積分学の教科書にも載っている」という類の事実でもないので，ここに略証を書いておきましょう．

非退化性を満たすことの略証

「$f = 0 \Rightarrow (f,f)_{L^2} = 0$」は明らかなので，「$(f,f)_{L^2} = 0 \Rightarrow f = 0$」を背理法で証明します．$f$ が $[a,b]$ において恒等的に 0 でないと仮定すると，

$$f(x_0)^2 > 0\ \cdots\ (*)$$

となるような $x_0 \in [a,b]$ が存在します．すると，f の「連続性」から x_0 の十分近くではやはり $(*)$ が成り立っている（ここを誤魔化している！）ので，十分小さい δ に対して $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ ならば，$f(x)^2 > 0$ が成り立ちます（ただし，$[x_0-\delta, x_0+\delta]$ が真に $[a,b]$ に含まれるように十分小さく δ をとります）．すると，正値の関数は積分区間が小さくなればその積分値も小さくなることから，

$$\int_a^b f(x)^2\ dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)^2\ dx > 0$$

が得られますが，これは仮定の $(f,f)_{L^2} = \int_a^b f(x)^2\ dx = 0$ に矛盾します．　□

[*28] 「L」は Lebesgue（ルベーグ）という数学者の頭文字をとったものです．その理由は，L^2 内積はその積分を Lebesgue 積分で解釈することによってその真価を発揮するからです．このことに関しては後でまた述べます．

L^2 内積という積分を用いた関数同士の内積を定義したわけですが，それは初見の人にとって大変不思議なものではないでしょうか．L^2 内積の心を説明するために，ユークリッド内積と L^2 内積の定義を書き並べてみます．

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$$(f, g)_{L^2} = \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

この 2 式を見て，何か気付きませんか？区分求積法を思い起こせばわかるように，積分とは非常に大雑把にいえば，微小な長方形の「和」の極限を意味していました（そもそもそれが積分の定義です）．そのような「$\int$ は $\sum$ の連続バージョン」というイメージを持っていれば，2 つの内積の繋がりが見えてきませんか？標語的にかけば，

$\boldsymbol{L^2}$ 内積とは離散的な和で定義されたユークリッド内積を
連続的な和（積分）に拡張したものである

ということになります（「dx はどうした！？」と細かいことが気になる人は，L^2 内積を，区間の長さ $b-a$ で割って「平均化」したものとして定義しましょう）．

さて，内積を定義したので，次にノルムの定義に移ります．

定義 D.13（ノルム）

ベクトル空間 V の元 $\boldsymbol{x}$ に対して，実数 $\|\boldsymbol{x}\|$ が対応し，次の性質を満たすとき，V にノルムが与えられたといい，$\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ の**ノルム**という．

(1) 正値性

$$\|\boldsymbol{x}\| \geqq 0$$

(2) 非退化性

$$\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

(3) 斉次性

$$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|$$

(4) 三角不等式（劣加法性）

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

なお，ノルムが与えられたベクトル空間を**ノルム空間**といい，$(V, \|\cdot\|)$ と表記する．

繰り返しになりますが，ミンコフスキーノルムはD.2節で述べたように非退化性と三角不等式をみたさないためノルムとはいえませんが，慣例によりそうよばれています．また，もう書かなくてもわかると思いますが，これはD.1節で述べた定理D.3（ユークリッドノルムの性質）と同じですね．そして，実は次の定理が示すように内積空間は自動的にノルム空間になります．

定理 D.13　内積空間 $(V,(\cdot,\cdot))$ において，$\boldsymbol{x}\in V$ に対して，

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} \tag{D.37}$$

とおけば，$\|\boldsymbol{x}\|$ は V にノルムを与える．このノルムを**内積から導かれたノルム**という．

ここで，この定理（(D.37) で定義された $\|\boldsymbol{x}\|$ がノルムの定義をみたすこと）の証明は実はもう完了しています．というのもD.1節において，「ユークリッドノルムを定義し（定義D.2），そのユークリッドノルムの性質（定理D.3）をユークリッド内積の性質（定理D.1）のみを用いて証明したこと」を思い出してください．定義D.2と定理D.13における (D.37)，定理D.3と定義D.13（ノルムの定義），定理D.1と定義D.11（内積の定義）がそれぞれ対応していることを考慮すれば，D.1節とまったく同様にして，(D.37) で定義された $\|\boldsymbol{x}\|$ がノルムの定義をみたすことが内積の定義のみを用いて証明されるのです．

この命題を用いることで，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, f\in C([a,b])$ に対して，

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^n}=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})_{\mathbb{R}^n}}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2} \tag{D.38}$$

$$\|f\|_{L^2}=\sqrt{(f,f)_{L^2}}=\sqrt{\int_a^b|f(x)|^2\,dx} \tag{D.39}$$

というノルムが定義でき，これらをそれぞれ，**ユークリッドノルム**，$\boldsymbol{L^2}$ **ノルム**といいます（絶対値は付けても付けなくても値は変わりませんが，これも慣例上付けられることが多いです）．**$\mathbb{R}^n$ ノルムはともかく，積分を用いて定義される $\boldsymbol{L^2}$ ノルムが本当にノルムの性質をみたすかどうかは元来まったく明らかではありません．しかし定理 D.13 は，「どんな形で定義されようとそれが内積の性質をみたすのであれば，(D.37) で定義されるもの（写像）は自動的にノルムになる」ということを主張しているのです．これが，内積を具体的に与えるのではなく抽象的に定義したことの御利益といえます．**抽象化の御利益つ

いでに書いておくと，次の 2 つの不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2}$$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right| \leqq \left(\int_a^b |f(x)|^2\ dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2\ dx\right)^{1/2}$$

は，どちらも「シュワルツの不等式」として，高校数学の別々の単元で登場したことでしょう．しかし，これら 2 つの不等式の本質は，ベクトルの内積とノルムの間に成り立つ関係

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

，すなわち D.1 節で証明したシュワルツの不等式（定理 D.4）だったのです．実際，前者はユークリッド内積とユークリッドノルム，後者は L^2 内積と L^2 ノルムでシュワルツの不等式を考えればいいですね（繰り返しになりますがシュワルツの不等式は すべての 内積空間において成り立ちます！）．別々の顔をしていたものが抽象化という作業を経て統一されるというのは，数学でよく起こることであると同時に，かなりの感動を与えてくれる瞬間であると（少なくとも私は）思います．

最後に，この付録のタイトルでもある幾何構造と内積の関係をまとめましょう．幾何的概念というと，本文で口酸っぱく述べてきたように長さと角が挙がります．まず，ベクトルの長さはノルムとして定義されます．実際，ユークリッドノルム (D.38) の定義を見るとこれは平面幾何におけるピタゴラスの定理の拡張となっているので，ノルムをベクトルの長さとして採用する妥当性がわかると思います．また，2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のなす角は，

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$$

を満たす θ として，内積とノルムを用いて定義されます．この定義は，D.1 節で述べた (D.19) とまったく同様にして，シュワルツの不等式というすべての内積空間について成り立つ事実のみを用いて意味を持たせることができます．したがって，ノルムが内積によって定義されるという事実を思い出せば，

内積が決まれば，長さと角が自動的に決まる

ということが理解できると思います．さらに，私たちは D.1 節の最後に内積を用いて「直交」という概念を導入し，さらにピタゴラスの定理を内積の性質のみを用いて示しまし

た．すなわち，これらのことも一般の内積空間に拡張することができるのです．したがって，長さ，角，直交，ピタゴラスの定理といった幾何において重要な概念や定理がすべて内積のみによって決定，あるいは証明されるという事実は，

内積という概念の中に幾何的概念が完全に取り込まれている

ということの 1 つの証左になりうるでしょう．このような考えの下で本文第 1 節で定義した**幾何学**は，

内積空間を調べる理論

とより広く深く再解釈できるのです．[*29]

さらに，今まで述べたことの別の見方として，

私たちがユークリッド空間でしか定義されないと思っていた長さや角といった概念は
内積という道具を用いることによってベクトル空間というより広範な空間に拡張できる

というものがあります．換言すれば，

内積がベクトル空間に幾何構造をこしらえる

ということです．

付録の付録　内積空間と解析構造

付録 D の付録として，内積がベクトル空間に幾何構造のみならず解析構造[*30]をも取り入れるということを説明し，さらに数理物理学で大変重要な役割を果たすヒルベルト空間の説明をしたいと思います（「ヒルベルト」という名称は，19 世紀から 20 世紀にかけて数学界に革命を起こしたといわれる大数学者ダフィット・ヒルベルトの名前から取っています）．ただし，解析的概念とは微分や積分の概念の母胎となる極限概念のことを指すものとします．

[*29] 本文でも述べましたが，射影幾何学のようにこの定義では収まりきらない幾何学も存在します（ただし，射影幾何学の場合内積の概念をうまく拡張すれば，射影空間を内積空間のように思えるとのことらしいのですが，残念ながらその部分は私の理解の範疇を超えていました...）．また，リーマン幾何学の場合は大雑把にいえば，「各点における接空間」を内積空間として考えていると思ってください．

[*30] 普通は「位相構造」という言葉を用いますが，高校生にはイメージが付きにくいと思うので，「幾何」という言葉に対応させて「解析」という言葉を用いました（「解析性」というとベキ級数展開可能性のことを指すことがほとんどなので，本当はあまりいい言葉遣いではないのですが）．

さて，実数上では極限は以下のように定義されていました．

定義 D.14（$\mathbb{R}$ における収束）

数列 $\{a_n\}$ と実数 α に対して，

$$|a_n - \alpha| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つとき，$\{a_n\}$ は α に**収束する**といい，α をその**極限**という．

つまり収束とは，「n が十分大きいときに a_n と α の距離が 0 に近づく」ということです．ここで，（$\sqrt{x^2} = |x|$ より）絶対値が 1 次元ユークリッドノルムになっていることに注意してこの定義を見てみると，

ノルムが定義されている空間（ノルム空間）なら
ユークリッド空間と同様に極限を定義できるのではないか？

という予想が立つことでしょう．実際，次のように定義されます（慣例にしたがって，ベクトル空間の記号を X に変えています）．

定義 D.15（ノルム空間における収束）

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．関数列 $\{f_n\} \in X$ と関数 f に対して，

$$\|f_n - f\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つとき，$\{f_n\}$ は f に**収束する**といい，f をその**極限**という．

定理 D.13 で見たように内積が定まればノルムが定まり，上の定義からノルムが定まれば収束が定まります．[*31] すなわち，

内積はベクトル空間に解析構造を与える

ということです．

[*31] ただし，関数空間（関数のつくる空間）の場合，ベースとなる空間が同じでもノルムの与え方によって定まる収束も変わってきます．例えば，$C([a,b])$ には L^2 ノルム以外にも $\|f\|_{\max} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ で定義されるノルムを与えることができます．

次に，ヒルベルト空間というものについて説明し，この付録を終わりたいと思います．簡単には，

ヒルベルト空間とはユークリッド空間を解析学に適するように拡張した空間

ということができます．「解析学に適するように」という部分が曖昧なので，ここを数学的にきちんと述べてみましょう．まず，次の定義を見てみてください．

定義 D.16（コーシー列）

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．関数列 $\{f_n\} \in X$ に対して，

$$\|f_m - f_l\| \to 0 \quad (m, l \to \infty)$$

が成り立つとき，$\{f_n\}$ を**コーシー列**という．

定義 D.17（完備性）

ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の任意のコーシー列が X 内に極限を持つとき，ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ は**完備である**という．

かなり抽象的な定義なので，コメントしておきましょう．コーシー列とは「番号が大きくなるにしたがって互いに距離が近づいていく列」ですが，そのような列が必ずどこかの点に収束するとき，そのような空間を完備というのです．これは考えてみれば自然な要請であり，むしろ完備でない空間の方が違和感が大きいのではないでしょうか（「お互いに近づいていくのに，最終的にどこにも収束しない」なんて嫌ですよね）．実際，私たちが慣れ親しんでいるユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は完備な空間になっています．完備な空間の場合，ユークリッド空間とほぼ同様にして収束に関する議論ができ，それはすなわち微分や積分の議論もできるということを意味しています．解析学とは大雑把にいえば微積分の理論であるので，これらのことから，

完備な空間とは解析学に適した空間である

と結論づけることができます．もちろん完備でない空間はいくらでも存在して，ノルム空間 $(C([a,b]), \|\cdot\|_{L^2})$ がその例になっています．[*32]ただし，完備でない空間（収束の議論が

[*32] ただし，ノルム空間 $(C([a,b]), \|\cdot\|_{\max})$ は完備になります．このことは，関数空間はノルムの与え方によってまったく性質が異なるものになることを示す好例となっています．

まともにできないような空間）が解析学で使われることはあまりありません．

では準備が整ったので，ヒルベルト空間を定義しましょう．

定義 D.18（ヒルベルト空間）

内積空間 $(X, (\cdot,\cdot))$ が，その内積から導かれるノルムによって完備であるとき，内積空間 $(X, (\cdot,\cdot))$ を**ヒルベルト空間**という．

内積が空間に幾何構造を組み込むということと，前述した完備であることの意味を考えれば，

ヒルベルト空間とは，幾何構造と解析構造がうまく整合した空間

ということができます．もちろん，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ はヒルベルト空間になっています．これだけではつまらないので，もう 1 つヒルベルト空間の例を挙げましょう．

定義 D.19（L^2 空間）

$[a,b]$ 上の関数 f が，

$$\|f\|_{L^2} = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty \tag{D.40}$$

をみたすとき，f を L^2 関数という．また，L^2 関数全体の空間を $\boldsymbol{L^2}$ **空間**といい，$L^2([a,b])$ と書く．[*33]

定理 D.14 $(L^2([a,b]), (\cdot,\cdot)_{L^2})$ はヒルベルト空間となる．

さて，冒頭で「ヒルベルト空間とは，ユークリッド空間を解析学に適するように拡張した空間」と書きましたが，今までの話だけでは何をどう拡張したのかよくわかりませんね．まず，ユークリッド空間は有限次元のベクトル空間であるということを注意しときます．ここで**次元**とは，イメージで説明すれば，「座標軸の本数」といった感じです．例え

[*33] 実際には，(D.40) における積分をルベーグ積分で解釈したものが L^2 関数の定義であり．それゆえ f には「可測」という条件が必要になります．しかも，$L^2([a,b])$ において $\|\cdot\|_{L^2}$ は非退化性をみたさずノルムにならないため，適当な商空間を考えるという補正が必要になります．

ば，$\mathbb{R}^2$ なら 2 本の座標軸となるようなベクトル

$$\overrightarrow{e}_1 = (1,0), \quad \overrightarrow{e}_2 = (0,1)$$

がとれます．これを $\mathbb{R}^2$ の**正規直交基底**といいます（「正規」とは大きさが 1 という意味です）．この正規直交基底（座標軸）があることで，ユークリッド空間は非常に使いやすいものになってます．実際，高校の図形問題においても，座標平面（空間）をうまく利用することで簡単に解けることがありますね（付録 C で回転の表示式を求める際にも正規直交基底が役立っていたことを思い出してください）．一方，$C([a,b])$ や $L^2([a,b])$ といった解析学で重要となるベクトル空間は一般に無限次元になります．ここで，普通の無限次元ベクトル空間には正規直交基底[*34]が存在しない（そもそも内積空間でないと「直交」が定義できない）のですが，$L^2([a,b])$ のような「解析学で頻繁に登場するヒルベルト空間」[*35]には必ず正規直交基底が存在することが証明できます．もちろんそれは無限個あるのですが，正規直交基底があるおかげでヒルベルト空間は部分的にユークリッド空間と同じような扱いが可能になるのです．「無限個の正規直交基底がある」という点を踏まえて，大雑把には，

ヒルベルト空間とはユークリッド空間の無限次元版である

ということができます．その意味で，ヒルベルト空間はユークリッド空間の拡張といえるわけです．ちなみに，ヒルベルト空間など無限次元空間を調べる理論は**関数解析**といわれ，偏微分方程式を解析するための重要な道具となっています．

最後にヒルベルト空間，特に $L^2([a,b])$ の数理物理学への応用を見てみましょう．

- 量子力学
  まず有名なところでは，**量子力学**の舞台はヒルベルト空間になります．量子力学において，粒子の状態を表す波動関数とよばれる 2 変数（複素数値）関数 $\Psi(x,t)$ が重要な役割を果たします．実際，粒子が $[a,b]$ に存在する確率は，$\Psi(x,t)$ の x に関する L^2 ノルム，すなわち，

$$\|\Psi(\cdot,t)\|_{L^2} = \int_a^b |\Psi(x,t)|^2 \, dx$$

[*34] 「基底」という用語は有限次元空間における代数的な有限和を連想させるので，無限次元空間では完全正規直交系といわれる場合が多いです．

[*35] 厳密には可分なヒルベルト空間といいます．「可分」という条件なしでは，必ずしもヒルベルト空間に完全正規直交基底が存在するとはいえません．

に比例するといわれています．

- エネルギー

  L^2 ノルムは**エネルギー**の概念と結びつき数理物理学への応用においてとても重要なものです（運動エネルギーを考えればわかるように，物理量の 2 乗はエネルギーと密接に関わっています）．「エネルギー」と書くと数学というより物理に登場するものだと思われがちですが，数理物理における非線形偏微分方程式を数学的に解析する際には，個々の方程式が持つエネルギーをうまく評価することが重要になってきます．そのような評価を用いて偏微分方程式を解析する手法を**エネルギー法**といい，非線形偏微分方程式への数学的アプローチとして欠かすことのできない手法となっています．

以上，本付録で述べてきたことをまとめると，

内積はベクトル空間に幾何構造と解析構造を生み出す

ということになります．この付録を読んでくれた人に，

内積はただの計算技術などではなく，数学に豊饒な世界をもたらしてくれる概念である

ということを少しでも理解させられたのなら幸いです．

参考文献

まず，中学一年生でも読み進められる読み物的な参考文献を紹介します．

[1] 佐藤勝彦 監修，「相対性理論」を楽しむ本，PHP 文庫，1998

相対性理論について，非常にわかりやすく書かれています．2 節の構成や内容は，この本を大いに参考にさせてもらいました．数式をほとんど交えていないため，非常に読みやすいです．また一般相対性理論の概要を数式なしで知りたい人にもおすすめです．

[2] ニュートンムック，相対性理論， ニュートンプレス，2012

相対性理論について，数式を用いずに簡潔にまとめられています．ニュートンではこの本以外にも多くの相対性理論に関する本が出版されているので，興味がある人は調べてみてください．

次に，相対論に関してある程度の内容まで踏み込んでいてかつ読みやすいであろう参考文献を紹介します．

[3] 竹内淳，高校数学でわかる相対性理論，講談社（BLUE BACKS），2013

BLUE BACKS からの出版ですが，かなりきちんとかつ丁寧に特殊相対性理論について書かれています．ただし，第 7 章と第 8 章は高校数学以上のことも用いています（もちろん説明はあります）．また，付録 B で触れましたが，この本の第 5 章には相対論的質量の定義の出自と，運動方程式を用いた $E = mc^2$ の導出が書かれています．少し長いですがそれほど難しくはないので，興味ある人は参考にしてください（後者の説明は，微分法の理解を前提にしています）．

[4] 一石賢，道具としての相対性理論，日本実業出版社，2005

大学教養レベルの予備知識（多変数の微積分と線形代数）は必要ですが，相対性理論について数式を交えて丁寧に解説している本です．特筆すべきは，一般相対性理論まで解説している点です．ただし，丁寧に解説されているとはいえ，一般相対性理論のレベルはかなり高いです．

[5] 高橋真聡，相対性理論がわかる 天才アインシュタインの考え方に迫る，技術評論社，2011

数式もところどころ出てきますが言葉による説明や図も多いので，かなり読みやすい本だと思います．ただし，きちんと読もうとするとやはり大学教養レベルの数学の知識が必要になります．

[6] J.J. キャラハン 著，樋口三郎 訳，時空の幾何学 特殊および一般相対性理論の数学的基礎，シュプリンガー・フェアラーク東京，2003

題名の通り，特殊相対性理論と一般相対性理論を数学を駆使して解説している本です．非常によい本だと思うのですが，残念ながら絶版となっています（英語版ならまだ購入できます）．

[7] G. ジェニングス 著，伊理正夫・伊理由美 訳，幾何再入門，岩波書店，1996

題名は幾何ですが，特殊相対性理論についても数学者目線で書かれています．そもそも今回のリレー講座に相対性理論を盛り込もうと思ったのはこの本があったからであり，感謝の気持ちも込めてここに記したいと思います．ただし，この本も残念ながら絶版となっています．

最後に，数学者の手によって書かれた参考文献を紹介します．

[8] 溝畑茂，解析学小景，岩波書店，1997

付録 A.1（ローレンツ変換の導出）を書くにあたり，この本の 21 節を参考にしました．ただし，この本自体は相対性理論の本ではなく，解析学の話題が読み切り形式で書かれています．この本の著者である溝畑茂先生は偏微分方程式論で世界的に有名な方で，はしがきによれば，この本は解析学を学ぼうと思っている人向けに書かれたとのことです．大学で習う解析学がどのようなものかということに興味を持っている人は一読を薦めます．学部で学ぶ解析学の話題はほぼ網羅されています．

[9] 新井朝雄，物理現象の数学的諸原理-現代数理物理学入門-，共立出版，2003

付録 D.2（ミンコフスキー空間論）を書くにあたり，この本を参考にしました．数理物理学の専門家が書いた本であるので数学的にもかなり厳密に書かれていますが，その分大学数学に慣れていないと読み進めるのは大変かもしれません．ちなみに，相対性理論以外にも，解析力学，電磁気学，量子力学などについても書かれています．